SoSe 2019

Übungen zur Physik II

Vorlesung: Prof.Dr. Tilmann Kuhn, Prof.Dr. Cornelia Denz
Übungen: Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 4

Abgabe: 02.05.19
Besprechung: 06. oder 07.05.19

Aufgabe 10: Druck in der Atmosphäre **(8 Punkte, mündlich)**

Einige Eigenschaften der Atmosphäre können gut in verschiedenen Näherungen beschrieben werden.

(a) (2 Punkte) Benutzen Sie das hydrostatische Gleichgewicht

$$p(z) - p(z+dz) = \rho(z) g\, dz,$$

um zu zeigen, dass unter der Annahme, dass die Atmosphäre isotherm ist d.h. die Temperatur in der Atmosphäre konstant ist, der Druck von der Höhe z wie folgt

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \qquad \text{(Barometrische Höhenformel)}$$

abhängt, wobei H die isotherme Skala ist:

$$H = \frac{R\,T}{M_a g}$$

M_a ist die atomare Masse der Atmosphäre ($M_a = 29\,\text{g/mol}$).

Hinweis: Mit Hilfe der Beziehung für das hydrostatische Gleichgewicht stellen Sie eine Differentialgleichung auf. Benutzen Sie das ideale Gasgesetz um die Beziehung zwischen der Dichte $\rho(z)$ und dem Druck $p(z)$ zu ermitteln.

(b) (2 Punkte) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teil (a) um zu zeigen, dass die Masse der Atmosphäre durch

$$M = \frac{4\pi R_E^2\, p_0}{g}\left[1 + 2\frac{H}{R_E} + 2\frac{H^2}{R_E^2}\right]$$

gegeben ist, wobei R_E der Radius der Erde und p_0 der atmosphäriche Druck am Boden ist. Wie groß ist die Masse der Atmosphäre ($T = 15°C$ und $R = 8.314\,\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$)?

Hinweis: Benutzen Sie die Kugelkoordinaten mit Ursprung in der Mitte der Erde und integrieren Sie die Dichte aus Teil (a).

(c) (3 Punkte) Bisher hatten wir angenommen, dass die Temperatur in der Atmosphäre konstant ist. Tatsächlich stellt man aber fest, dass die Temperatur sich mit der Höhe ändert. Nehmen wir nun an, dass die Luft wenn sie nach oben steigt (weil der Druck in höheren Lagen kleiner ist), sich ausdehnt und adiabatisch (ohne Wärmeaustausch) gekühlt wird.
Bei adiabatischen Prozessen ist der Druck mit der Temperatur verknüpft durch

$$p^{1-\gamma} T^{\gamma} = \text{konstant},$$

wobei $\gamma = \text{konst}$. Benutzen Sie das hydrostatische Gleichgewicht aus Teil (a) um zu zeigen, dass bei der adiabatischen Atmosphäre die Temperatur mit der Höhe z wie

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{z}{H_0}\right)$$

fällt, wobei H_0 die isothermische Skala bei der Bodentemperatur T_0 ist. Zeigen Sie weiter, dass der Druck von der Höhe wie folgt

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{z}{H_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

abhängt.

(d) (1 Punkt) Überprüfen Sie, dass für $\gamma \approx 1$ die Temperatur konstant ist und der Druck durch

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H_0}\right),$$

gegeben ist.

Aufgabe 11: Ideales Gas, Zustandsgleichung **(6 Punkte, schriftlich)**

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie für das ideale Gas die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p && \text{der isobaren Volumenausdehnung,} \\ \beta &= \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V && \text{der isochoren Druckerhöhung,} \\ \kappa &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T && \text{der isothermen Kompression.} \end{aligned}$$

(b) (3 Punkte) Gegeben sei die Funktionalrelation $g(x, y, z) = 0$. Dann lässt sich eine der Variablen als Funktion der beiden anderen auffassen: $z(x, y)$ oder $y(x, z)$ oder $x(y, z)$. Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten:

$$\text{(i)} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y = \frac{1}{\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_y}, \qquad \text{(ii)} \quad \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_x \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y = -1$$

Hinweis: Betrachten Sie $x(y, z)$ sowie $z(x, y)$ und setzen Sie das Differential dx in das Differential dz ein. Bringen Sie den resultierenden Term in die Form $a\,dz = b\,dy$ und nutzen Sie aus, dass dz und dy unabhängig voneinander sind.

(c) (1 Punkt) Verifizieren Sie die Beziehung (ii) für das ideale Gas. Drücken Sie diese durch die Koeffizienten aus Teilaufgabe (a) aus.

Aufgabe 12: Zustandsänderungen **(6 Punkte, schriftlich)**

Ein ideales Gas soll vom Zustand (p_0, V_0) in den Zustand $(p_1, V_1) = (\frac{1}{2}\,p_0, 3V_0)$ gebracht werden. Berechnen Sie die dabei geleistete Arbeit ΔW, die Änderung der inneren Energie ΔU und die zugeführte bzw. abgegebene Wärmeenergie ΔQ für die Wahl folgender Wege:

(a) isobar-isochor

(b) isochor-isobar

(c) isotherm-isochor

(d) isochor-isotherm

Tragen Sie die Prozesswege in ein $p - V$ Diagramm ein.