Aufgabe 4: Clebsch-Gordan-Koeffizienten (mündlich, 10 Punkte)

Betrachten Sie ein Elektron (im Atom) mit Bahndrehimpuls l und Spin $s = \frac{1}{2}$. Der gekoppelte Drehimpuls j kann somit die Werte $j = l \pm \frac{1}{2}$ annehmen, mit entsprechenden Möglichkeiten für m_j.

Zeigen Sie, dass die zugehörigen Zustände durch

$$\left| l + \frac{1}{2},\, m_j \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\,l+1}} \left[\sqrt{l + m_j + \frac{1}{2}} \left| m_j - \frac{1}{2} \right\rangle \left| \uparrow \right\rangle + \sqrt{l - m_j + \frac{1}{2}} \left| m_j + \frac{1}{2} \right\rangle \left| \downarrow \right\rangle \right] , \tag{1}$$

$$\left| l - \frac{1}{2},\, m_j \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\,l+1}} \left[\sqrt{l - m_j + \frac{1}{2}} \left| m_j - \frac{1}{2} \right\rangle \left| \uparrow \right\rangle - \sqrt{l + m_j + \frac{1}{2}} \left| m_j + \frac{1}{2} \right\rangle \left| \downarrow \right\rangle \right] . \tag{2}$$

gegeben sind.

Beweisen Sie Gl. (1) z. B. mittels vollständiger Induktion. Begründen Sie damit, ausgehend von der Orthogonalität der Zustände, auch die Relation in Gl. (2).

Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Formel für maximales m_j gilt und wenden Sie anschließend den Absteigeoperator J_- auf $|j,\, m_j\rangle$ an, um den Induktionsschritt durchzuführen. Es sind

$$J_- \,|j,\, m_j\rangle = \hbar \sqrt{j\,(j+1) - m_j\,(m_j - 1)}\,|j,\, m-1\rangle \qquad \text{und} \qquad J_- = L_- + S_- \,.$$

Aufgabe 5: Anharmonischer Oszillator (schriftlich, 10 Punkte)

Ein harmonischer Oszillator werde durch ein schwaches Zusatzpotential vierter Ordnung gestört, d. h. es gilt

$$H \,=\, H_0 \,+\, H_1 \qquad \text{mit} \qquad H_0 \,=\, \frac{p^2}{2\,m} \,+\, \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2 \qquad \text{und} \qquad H_1 \,=\, \alpha\,x^4 \,.$$

a) [5P] Berechnen Sie die Matrixelemente von x^4 in der Basis der Eigenzustände des harmonischen Oszillators.

   Hinweis: Aus der Vorlesung können die folgenden Formeln benutzt werden:

$$x \,=\, \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,(a + a^\dagger) \,, \qquad a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \,, \qquad a^\dagger = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

   sowie

$$x_{n\,n'} \,=\, \langle n|x|n'\rangle \,=\, \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\left(\sqrt{n'}\,\delta_{n,\,n'-1} \,+\, \sqrt{n'+1}\,\delta_{n,\,n'+1}\right) \,.$$

b) [2P] Berechnen Sie die Energiekorrektur $E_n^{(1)}$ des Zustandes $|n\rangle$ in erster Ordnung Störungstheorie.

c) [3P] Wiederholen Sie die Prozedur in zweiter Ordnung. Unterscheiden Sie die Fälle $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und $n \geq 4$.