Aufgabe 6: Ritzsches Variationsverfahren (mündlich, 6 Punkte)

Die Grundzustandsenergie E_0 erfüllt für beliebige Zustände $|\psi\rangle$ die Ungleichung

$$E_0 \leq \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \; .$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung soll die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms, d. h. eines Elektrons im Potential

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \; ,$$

abgeschätzt werden.

a) [3P] Berechnen Sie eine Abschätzung $E_0^{(a)}$ unter Verwendung der Testfunktion

$$\psi(\vec{r}) = e^{-\alpha^2 r^2} \; .$$

Berechnen Sie hierzu die Energie $E(\alpha)$ in diesem Zustand und bestimmen Sie $E_0^{(a)}$ als Minimum von $E(\alpha)$.

b) [3P] Führen Sie dieselbe Rechnung wie in Teilaufgabe a) mit der Testfunktion

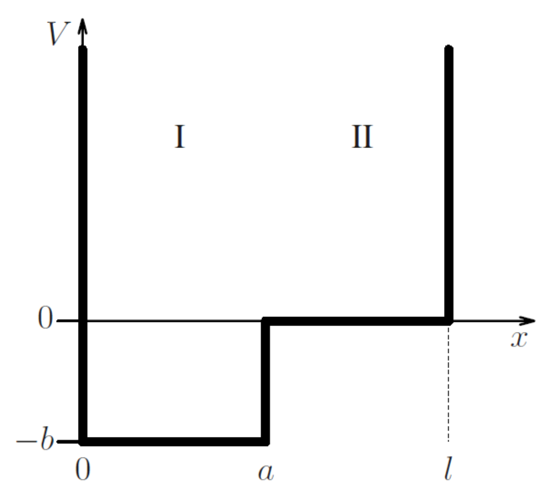
$$\psi(\vec{r}) = e^{-\beta r}$$

durch und bestimmen Sie damit die Abschätzung $E_0^{(b)}$. Welche Testfunktion liefert die bessere Abschätzung? Vergleichen Sie mit der exakten Grundzustandsenergie.

Aufgabe 7: Potentialtopf mit kleiner Stufe (mündlich, 6 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Potentialtopf der Form:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ -b & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{für } a \leq x < l \\ \infty & \text{für } x \geq l \end{cases} \; .$$



Dabei ist der Potentialtopf in einem Bereich $0 < x < a$ um die Energie b abgesenkt.

Die Energien und Wellenfunktionen des ungestörten Systems lauten bekanntlich:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2 m l^2} n^2 \qquad \text{und} \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(n \frac{\pi x}{l}\right) \; .$$

a) [3P] Betrachten Sie diese Absenkung des Potentials als kleine Störung und berechnen Sie die Grundzustandsenergie in erster Ordnung Störungstheorie. Was ergibt sich in den Grenzfällen $a = 0$, $a = l/2$ und $a = l$?

b) [3P] Berechen Sie die Wellenfunktion in erster Ordnung Störungstheorie für den Fall $a = l/2$.

Aufgabe 8: Störungstheorien (mündlich, 8 Punkte)

Ein harmonischer Oszillator, der durch den Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2$$

beschrieben wird, erfährt eine Störung, die sich durch $H_1 = \dfrac{1}{2}\,m\,\omega^2\,\lambda\,x^2$ ausdrücken lässt.

a) [2P] Berechnen Sie die Energiekorrektur zum Grundzustand in erster Ordnung Störungstheorie.

b) [2P] Zeigen Sie, dass sich die Korrektur zur Grundzustands-Wellenfunktion in erster Ordnung als Vielfaches der Wellenfunktion des zweiten angeregten Zustands schreiben lässt.

c) [2P] Berechnen Sie die Grundzustandsenergie bis zur zweiten Ordnung.

d) [1P] Wie lautet die exakte Grundzustandsenergie des durch $H = H_0 + H_1$ beschriebenen Systems?

e) [1P] Vergleichen Sie die störungstheoretischen Ergebnisse mit der exakten Grundzustandsenergie, indem Sie sie als Funktion von λ plotten.