Aufgabe 9: Entartete Störungsrechnung/Stark-Effekt (schriftlich, 6 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoff-Atom im homogenen elektrischen Feld, $\vec{E} = E\,\vec{e}_z$, das schwach genug sei, um als Störung zu gelten. Vernachlässigen Sie den Spin.

a) [1 P] Stellen Sie den Hamilton-Operator auf.

b) [1 P] Betrachten Sie den Einfluss der Störung auf das $n = 1$ Energieniveau des Wasserstoffatoms.

- Zeigen Sie, dass der Energiekorrekturterm in 1. Ordnung Null ist.
- Zeigen Sie, dass der Energiekorrekturterm in 2. Ordnung negativ und quadratisch in der elektrischen Feldstärke ist.

c) [3 P] Bestimmen Sie den Einfluss der Störung auf das $n = 2$ Energieniveau. Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:

- Überlegen Sie, welche Zustände energetisch entartet sind und somit berücksichtigt werden müssen (es sind vier!).
- Stellen Sie den Hamilton-Operator (inklusive Störung) als 4×4-Matrix auf.
- Bestimmen Sie die Eigenzustände.
- Es sollten zwei Zustände auftreten, die durch neuartige Linearkombinationen gegeben sind. Skizzieren Sie die zugehörigen Wellenfunktionen auf der z-Achse.

d) [1 P] Betrachten Sie abschließend den Kommutator zwischen dem Störterm und dem Drehimpuls-Operator $\hat{L}_z$; er sollte Null sein. Diskutieren Sie [im Kontext mit den Ergebnissen aus c)] die Bedeutung des Verschwindens dieses Kommutators.

Aufgabe 10: Kommutatoren und Erwartungswerte im Heisenbergbild (mündlich, 4 Punkte)

Geht man in der Darstellung vom Schrödingerbild ins Heisenbergbild über, so werden die Operatoren zeitabhängig. Diese Zeitabhängigkeit wird bestimmt durch die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\,A}{d\,t} = \frac{1}{i\,\hbar}\,[A,\,H]\ ,$$

wobei A einen beliebigen, nicht explizit zeitabhängigen Operator darstellt und H den Hamilton-Operator. Im Schrödingerbild gilt bekanntlich für Ortsoperator x und Impulsoperator p

$$[x_i,\,p_j] = i\,\hbar\,\delta_{ij} \qquad \text{und} \qquad [x_i,\,x_j] = [p_i,\,p_j] = 0\ ,$$

was im Heisenbergbild im Allgemeinen nur dann zutrifft, wenn beide Operatoren zum selben Zeitpunkt genommen werden. In dieser Aufgabe soll am Beispiel freier Teilchen untersucht werden, wie sich diese Kommutatoren ändern, wenn die Operatoren zu verschiedenen Zeiten angenommen werden.

a) [1 P] Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Orts- und den Impulsoperator eines freien Teilchens im Heisenbergbild auf. Wie lautet deren Lösung?

b) [2 P] Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[x_i\,(t),\, x_j\,(0)]\ , \qquad [x_i\,(t),\, p_j\,(0)]\ , \qquad [p_i\,(t),\, x_j\,(0)] \qquad \text{und} \qquad [p_i\,(t),\, p_j\,(0)]\ .$$

c) [1 P] Berechnen Sie die quadratischen Unschärfen

$$(\Delta\, x_i)^2 \;=\; \langle x_i^2\rangle \;-\; \langle x_i\rangle^2 \qquad \text{und} \qquad (\Delta\, p_i)^2 \;=\; \langle p_i^2\rangle \;-\; \langle p_i\rangle^2$$

als Funktion der Zeit in Abhängigkeit der Erwartungswerte zum Zeitpunkt $t \;=\; 0$.

Aufgabe 11: Getriebener harmonischer Oszillator (schriftlich, 10 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m und Ladung q, das sich im Potential eines harmonischen Oszillators bewegt. Zusätzlich befinde sich das Teilchen in einem räumlich homogenen, zeitabhängigen elektrischen Feld $E\,(t)$. Der Hamilton-Operator für dieses System lautet

$$H \;=\; \frac{p^2}{2\,m} \;+\; \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2 \;-\; q\,E\,(t)\,x\ .$$

Für $t \;<\; 0$ sei $E\,(t) \;=\; 0$ und das Teilchen befinde sich im Grundzustand $|0\rangle$ des harmonischen Oszillators.

a) [5 P] Gesucht ist die Lösung der Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für die Operatoren $x\,(t)$ und $p\,(t)$. Führen Sie dazu die Operatoren a und $a^\dagger$ ein mit

$$a \;=\; \sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,x \;+\; \frac{i}{\sqrt{2\,m\,\omega\,\hbar}}\,p\ , \qquad a^\dagger \;=\; \sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,x \;-\; \frac{i}{\sqrt{2\,m\,\omega\,\hbar}}\,p\ .$$

Drücken Sie den Hamilton-Operator durch a und $a^\dagger$ aus und stellen Sie die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für diese Operatoren auf. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit der Anfangsbedingung, dass die Operatoren zur Zeit $t \;=\; 0$ mit den Schrödinger-Operatoren a_0 und $a_0^\dagger$ übereinstimmen und bestimmen Sie damit $x\,(t)$ und $p\,(t)$ in Abhängigkeit von den Schrödinger-Operatoren $x\,(0) \;=\; x_0$ und $p\,(0) \;=\; p_0$.

Hinweis: Verwenden Sie für die spezielle Lösung der BWG den Ansatz: $a\,(t) \;=\; \tilde{a}\,(t)\,e^{-i\,\omega\,t}$.

b) [3 P] Berechnen Sie den Orts- und Impulserwartungswert als Funktion der Zeit und zeigen Sie explizit, dass das Ehrenfest'sche Theorem erfüllt ist.

Hinweis: Für eine Funktion $F(t) = \int\limits_0^t f(t,t')dt'$ gilt $\dfrac{dF}{dt} = f(t,t') + \int\limits_0^t \dfrac{\partial f(t,t')}{\partial t}dt'$.

c) [2 P] Berechnen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte der Operatoren a und $a^\dagger$ und zeigen Sie, dass diese schwankungsfrei sind in dem Sinne, dass gilt

$$\langle 0|(a^\dagger \;-\; \langle a^\dagger\rangle)\,(a \;-\; \langle a\rangle)|0\rangle \;=\; 0\ .$$