Aufgabe 17: Eigenschaften des Dirac'schen Spinoperators (schriftlich, 12 Punkte)

a) [3P] Zeigen Sie, dass der Dirac'sche Spinoperator $\vec{S}$ mit den Komponenten

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

und den Pauli'schen Spinmatrizen σ_i die Eigenschaften eines Drehimpulses besitzt, d. h. dass

$$[S_i, S_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} S_k$$

ist.

b) [6P] Berechnen Sie folgende Kommutatoren mit dem Dirac-Hamiltonoperator

$$H_\mathrm{D} = c\,\alpha^k p_k + \beta m_0 c^2 .$$

i) $[\vec{S}, H_\mathrm{D}]$,

ii) $[\vec{L}, H_\mathrm{D}]$, mit dem Drehimpulsoperator $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ und dem Orts- und Impulsoperator $\vec{r}$ und $\vec{p}$,

iii) $[\vec{S} + \vec{L}, H_\mathrm{D}]$,

iv) $[\vec{S} \cdot \vec{p}, H_\mathrm{D}]$.

c) [3P] Beweisen Sie für beliebige dreikomponentige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Relation

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}\right)\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \underline{1} + i\,\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) .$$

Hinweis: Die Pauli'schen Spinmatrizen haben folgende Eigenschaften:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \underline{1} , \qquad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k , \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \underline{1} ,$$

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z = i \underline{1} , \qquad \mathrm{Sp}(\sigma_i) = 0 , \qquad \det(\sigma_i) = -1 .$$

Aufgabe 18: **Endliche Ausdehnung des Atomkerns** **(mündlich, 8 Punkte)**

Das elektrostatische Potential eines Atomkerns kann durch das Potential einer homogen geladenen Kugel angenähert werden. Dann bewegt sich ein Elektron in einem wasserstoffartigen Atom im Potential

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{3\,Z\,e^2}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,R}\left(1 - \dfrac{r^2}{3\,R^2}\right) & \text{für} \quad r \leq R \\[2ex] -\dfrac{Z\,e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} & \text{für} \quad r > R \end{cases} .$$

Die Abweichung vom Coulombpotential ist eine kleine Störung H_1 des ungestörten Wasserstoffproblems H_0.

a) [2P] Skizzieren Sie das Potential.

b) [4P] Berechnen Sie die Energiewerte in 1. Ordnung Störungstheorie. Verwenden Sie als ungestörte Zustände die exakten Wellenfunktionen $\psi_{nlm}(\vec{r})$ des wasserstoffähnlichen Atoms (ohne Abschirmeffekte durch die elektronische Ladungsdichteverteilung).

c) [2P] Geben Sie speziell die Energieverschiebung der $1\,s$-Zustände für die Isotope $A = 203$ und $A = 205$ von Thallium ($Z = 81$) an.

   Hinweise: Die Kernradien $R \approx A^{1/3}\,r_0$ mit $r_0 = 1.2$ fm sind viel kleiner als der Bohr'sche Radius a_B/Z mit $a_B = 0.53$ Å. Daher können in den auftretenden Integralen die Wellenfunktionen näherungsweise durch ihren Wert an der Stelle $r = 0$ approximiert werden.