3. Übung zur Statistischen Physik [Krüger, SS 2020]
Ausgabe: 05.05.2020, Abgabe: 12.05.2020, 12 Uhr

WWU

Aufgabe 5: Stirling'sche Formel [8 Punkte]

Im Rahmen der Statistischen Physik werden wir häufig von der Näherung für die Fakultät einer sehr großen Zahl N Gebrauch machen:

$$N! \simeq N^N \cdot \mathrm{e}^{-N} \cdot \sqrt{2\pi N} \qquad \text{(Stirling'sche Formel)}\ .$$

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Stirling'schen Formel, indem Sie von der Darstellung

$$N! = \Gamma(N+1) = \int_0^\infty x^N \,\mathrm{e}^{-x}\, dx = \int_0^\infty \mathrm{e}^{N\cdot\ln x - x}\, dx$$

ausgehen und das Integral näherungsweise lösen.

Substituieren Sie dazu $x = N + \sqrt{N}\,y = N\left(1 + \frac{y}{\sqrt{N}}\right)$, zeichnen Sie den resultierenden Integranden $\mathrm{e}^{f(y)}$ und bestimmen Sie sein Maximum. Entwickeln Sie $f(y)$ in der Umgebung des Maximums bis zur zweiten Ordnung. Berechnen Sie dann das Integral in dieser Näherung, indem Sie zusätzlich beachten, dass die Stirling'sche Formel für sehr große N gelten soll.

b) Wenden Sie die Stirling'sche Formel zur Berechnung von $\ln N!$ für $N = 1, 2, \dots, 20$ an und vergleichen Sie Ihre Resultate mit den exakten Ergebnissen. Zeichnen Sie den absoluten und den relativen Fehler als Funktion von N.

Aufgabe 6: Binomialverteilung [9 Punkte]

Nach einer längeren Spielpause bereitet sich ein Fußballspieler auf ein großes Turnier vor und übt jeden Tag N-mal das Schießen von Elfmetern. In den ersten Tagen erzielt er bei jedem Versuch mit der Wahrscheinlichkeit a einen Treffer und mit der Wahrscheinlichkeit b verfehlt er das Tor oder der Torwart hält den Ball.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $w_N(j)$ bzw. $\tilde{w}_N(j)$ dafür an, dass bei N Schüssen j zu einem bzw. keinem Treffer führen. Wie groß ist die mittlere Zahl $\langle j \rangle$ von erzielten Treffern bzw. Fehlversuchen bei N Schüssen auf das Tor?

Wie groß ist jeweils die Schwankung $\Delta j = \sqrt{\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2}$?

Hinweis: Nutzen Sie $j \cdot a^j = a \frac{\partial}{\partial a} a^j$ und die Binomische Formel aus.

b) Für große N kann die in a) gefundene Verteilung $w_N(j)$ durch eine kontinuierliche Funktion einer kontinuierlichen Variablen approximiert werden:

$$w_N(x) = \frac{1}{\{2\pi N a b\}^{\frac{1}{2}}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x - N a)^2}{2 N a b}}\ .$$

Zeichnen Sie die Verteilung $w_N(j)$ aus a) für $N = 8$ und $a = 1/2$ und zeichnen Sie $w_N(x)$ in das gleiche Diagramm.

c) Nach einigen Wochen hat der Spieler sein Können perfektioniert, so dass schließlich gilt: $b \ll 1$ mit $b \cdot N = \lambda = \text{const}$. Fehlschüsse werden sehr selten. Zeigen Sie, dass die in a) gefundene Verteilung $\tilde{w}_N(j)$, dass bei N Schüssen auf das Tor j nicht zum Erfolg führen, im Grenzfall für sehr große N in die Poisson-Verteilung übergeht.

Aufgabe 7: Poisson-Verteilung [3 Punkte]

Gegeben sei die Poisson-Verteilung

$$w(j) = \frac{\lambda^j}{j!}\, e^{-\lambda} \qquad \text{mit} \qquad \lambda \text{ positiv, reell} .$$

a) Verifizieren Sie, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt.

b) Berechnen Sie den Mittelwert, die Varianz, die Streuung und die relative Abweichung vom Mittelwert.

c) Skizzieren Sie $w(j)$ für $\lambda = 3$.