4. Übung zur Statistischen Physik [Krüger, SS 2020]
Ausgabe: 12.05.2020, Abgabe: 19.05.2020, 12 Uhr

WWU

Aufgabe 8: Elektronengas [7 Punkte]

Viele thermodynamische Eigenschaften von Festkörpern lassen sich gut im Modell eines Elektronengases beschreiben. Unter Berücksichtigung quantenmechanischer Effekte ergibt sich in diesem Modell die innere Energie bei niedrigen Temperaturen zu

$$U(S, V) = a\,\frac{N^{\frac{5}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}} + b\,\frac{S^2}{V^{\frac{2}{3}}\,N^{\frac{1}{3}}} \qquad .$$

Dabei sind a und b positive Konstanten, die von der Elektronenmasse, dem Planck'schen Wirkungsquantum und der Boltzmannkonstante abhängen.

a) Berechnen Sie aus $U(S, V)$ die freie Energie $F(T, V)$ des Gases.

b) Bestimmen Sie den Druck $p(T, V)$ und die Wärmekapazität C_V. Wie verhalten sich diese Größen bei $T \to 0$?

Aufgabe 9: Volumen und Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel [6 Punkte]

Im Rahmen der Statistischen Physik treten Integrale auf, die dem Volumen einer n-dimensionalen Kugel entsprechen. Bei Verwendung von n-dimensionalen Kugelkoordinaten lässt sich das Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit dem Radius R als

$$V_n = \int\limits_{\text{Kugel}} d\,x_1 \ldots d\,x_n = \int\limits_0^R r^{n-1}\,d\,r \cdot \int\limits_{\text{Raumwinkel}} d\,\Omega_n = \frac{R^n}{n} \cdot W_n$$

darstellen.

Berechnen Sie das Volumen V_n, indem Sie das Hilfsintegral

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(x_1^2 + \ldots + x_n^2\right)}\,d\,x_1 \ldots d\,x_n$$

zunächst in kartesischen Koordinaten auswerten und dann durch Vergleich mit einer Bestimmung von I_n in Kugelkoordinaten das Raumintegral W_n ermitteln. Benutzen Sie dabei die Integraldarstellung der Gammafunktion. Wie groß ist die Oberfläche S_n einer n-dimensionalen Kugel? Geben Sie V_n und S_n für $n = 1, 2, \ldots, 5$ in expliziter Form an. Was ergibt sich für V_n, wenn Sie im Ergebnis die Stirling'sche Formel einsetzen?

Aufgabe 10: Phasenraum [7 Punkte]

a) Die Hamiltonfunktion eines klassischen harmonischen Oszillators lautet

$$H\,(q,\,p)\;=\;\frac{p^2}{2\,m}\;+\;\frac{1}{2}\,k\,q^2\;.$$

i) Zeichnen Sie für das System die Bahn im Phasenraum.

ii) Berechnen Sie das von der „Fläche“ $H\,(q,\,p)\;=\;E$ im Phasenraum eingeschlossene „Volumen“ $\varphi\,(E)$.

iii) Bestimmen Sie das „Phasenraumvolumen“

$$\Omega\,(E)\;=\;\varphi\,(E\,+\,\Delta\,E)\;-\;\varphi\,(E)\;.$$

b) Wiederholen Sie die unter a) durchgeführten Überlegungen für ein Teilchen im Potential

$$V\,(q)\;=\;a\,\cdot\,|q|$$

mit der Energie E.