5. Übung zur Statistischen Physik [Krüger, SS 2020]
Ausgabe: 19.05.2020, Abgabe: 26.05.2020, 12 Uhr

Aufgabe 11: Lagrange-Parameter [8 Punkte]

a) Für welche Werte w_j wird der Ausdruck $f = -\sum_{j=1}^{N} w_j \cdot c \cdot \ln w_j$ unter der Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{N} w_j = 1$ maximal? Dabei sei c eine positive Konstante.

b) Berechnen Sie die Funktion $w(x)$, die das Integral

$$I(w) = -\int_0^a w(x) \cdot c \cdot \ln w(x)\, dx$$

unter der Nebenbedingung $\int_0^a w(x)\, dx = 1$ maximal macht.

c) Bestimmen Sie die Funktion $w(x)$ so, dass das Integral

$$I(w) = -\int_0^\infty w(x) \cdot c \cdot \ln w(x)\, dx$$

maximal wird und die Nebenbedingungen

$$\int_0^\infty w(x)\, dx = 1 \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty x \cdot w(x)\, dx = b > 0$$

erfüllt sind.

Aufgabe 12: Harmonische Oszillatoren im mikrokanonischen Ensemble [7 Punkte]

Gegeben seien N dreidimensionale, klassische, unterscheidbare harmonische Oszillatoren der Frequenz ω. Berechnen Sie im mikrokanonischen Ensemble die Entropie dieses Systems und bestimmen Sie damit die kalorische Zustandsgleichung, den Druck und das chemische Potential.

Hinweis: Zeigen Sie, dass man die Hamiltonfunktion des Systems durch eine geeignete Substitution in die Form

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3N} \left(p_i^2 + \tilde{q}_i^2\right)$$

bringen kann. Verwenden Sie bei der Berechnung der Entropie die Stirling'sche Formel.

Aufgabe 13: Harmonische Oszillatoren im kanonischen Ensemble [5 Punkte]

Behandeln Sie die Oszillatoren aus Aufgabe 12 im kanonischen Ensemble und berechnen Sie die Zustandssumme. Bestimmen Sie damit die freie Energie F, den Druck, das chemische Potential und die innere Energie E.