Aufgabe 26: Eigenschaften des $f_{5/2}(z)$-Integrals [9 Punkte]

Die Funktion $f_n(z)$ ist durch folgendes Integral definiert:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty x^{n-1} \frac{1}{z^{-1} e^x + 1} \, dx \, .$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial z} f_n(z) = \frac{1}{z} f_{n-1}(z)$$

gilt. Führen Sie dazu nach dem Differenzieren eine partielle Integration aus.

b) Bei der Berechnung des großkanonischen Potentials des idealen Fermigases tritt das Integral

$$I(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^2 \ln\left(1 + z \cdot e^{-x^2}\right) dx$$

auf. Zeigen Sie, dass $I(z) = f_{5/2}(z)$ gilt. Verwenden Sie dazu die Substitution $y = x^2$ und integrieren Sie partiell.

c) Für große z lässt sich $f_{5/2}(z)$ durch

$$f_{5/2}(z) = \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left((\ln z)^{5/2} + \frac{5}{8}\pi^2 (\ln z)^{1/2} - \frac{7}{384}\pi^4 (\ln z)^{-3/2} + \cdots \right)$$

darstellen. Beweisen Sie diese Behauptung, indem Sie das oben angegebene Integral $f_n(z)$ mit $n = 5/2$ nach der Substitution $y = x - \ln z$ partiell integrieren. Ersetzen Sie in dem resultierenden Integral die untere Grenze $-\ln z$ durch $-\infty$ und nutzen Sie die Taylor-Reihe von $(1 + \varepsilon)^{5/2}$ aus.

Hilfsintegrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^l \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} \, dy = \begin{cases} 1 & \text{für } l = 0 \\ \dfrac{\pi^2}{3} & \text{für } l = 2 \\ \dfrac{7}{15}\pi^4 & \text{für } l = 4 \end{cases} .$$

Aufgabe 27: Freie Expansion eines Fermi-Gases [6 Punkte]

Ein Gas von N identischen, wechselwirkungsfreien Teilchen mit Spin 1/2 befinde sich in einem Volumen V. Die innere Energie des Systems hat die Form (siehe Vorlesung)

$$E = \frac{3}{2} N k_B T \frac{f_{5/2}(z)}{f_{3/2}(z)} \qquad \text{mit} \qquad z = e^{\beta\mu} \, .$$

Bei tiefen Temperaturen gilt für das chemische Potential

$$\mu(T) = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right)$$

mit der Fermienergie

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3} .$$

a) Berechnen Sie die innere Energie für kleine Temperaturen durch eine Entwicklung, die die Ordnung $\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2$ einschließt.

b) Das System sei abgeschlossen und befinde sich zunächst bei einer Temperatur $T_0 = 0\,\mathrm{K}$. Dann wird das Volumen von V auf $V + \Delta V$ vergrößert. Dabei sei $\Delta V \ll V$. Welche Temperatur T_1 stellt sich ein? Gehen Sie zur Berechnung von Ihrem Resultat aus a) aus und geben Sie T_1 in Abhängigkeit von der niedrigsten Ordnung $\frac{\Delta V}{V}$ an.

Aufgabe 28: Chemisches Potential eines Halbleiters [5 Punkte]

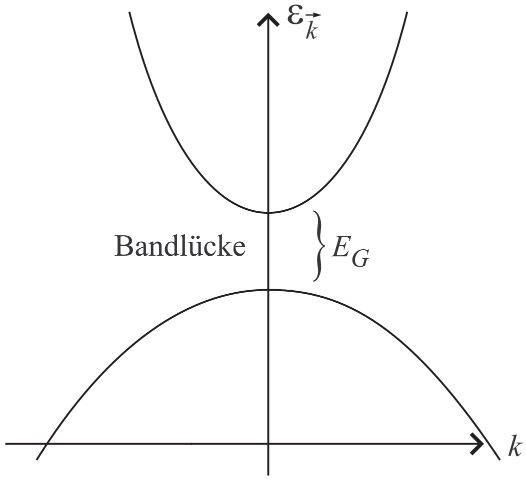
In einem einfachen Modell für einen Halbleiter werden die Einteilchenenergien durch

$$\varepsilon^V_{\vec{k}} = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_V}$$

für Elektronen im Valenzband und

$$\varepsilon^L_{\vec{k}} = E_G + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_L}$$

für Elektronen im Leitungsband beschrieben. Dabei sind m_V und m_L die effektiven Massen der Elektronen im Valenz- bzw. Leitungsband.



a) Bei einer endlichen Temperatur werden auch Zustände im Leitungsband besetzt. Berechnen Sie die mittlere Zahl von Elektronen im Leitungsband

$$N_L := \sum_{j\,\in\,\text{Leitungsband}} \bar{n}_j = 2\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\int\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon^L_{\vec{k}}-\mu)}+1}\,d^3k .$$

Bestimmen Sie ebenfalls die mittlere Zahl N_V der Elektronen, die im Valenzband gegenüber der „vollen Besetzung" fehlen:

$$N_V := \sum_{j\,\in\,\text{Valenzband}} (1-\bar{n}_j) = 2\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\int\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon^V_{\vec{k}}-\mu)}+1}\right)d^3k .$$

Verwenden Sie bei der Berechnung von N_L die Näherung

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon^L_{\vec{k}}-\mu)}+1} \approx \mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon^L_{\vec{k}}-\mu)} .$$

Warum ist diese Approximation bei einer Bandlücke $E_G = 1\,\mathrm{eV}$ und einer Temperatur $T = 300$ K sinnvoll? Benutzen Sie eine analoge Näherung, um N_V zu berechnen.

b) Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus a) und die Forderung $N_L = N_V$, um das chemische Potential $\mu(T)$ zu berechnen. Was ergibt sich für $\varepsilon_F = \lim_{T\to 0}\mu(T)$?