11. Übung zur Statistischen Physik [Krüger, SS 2020]
Ausgabe: 07.07.2020, Abgabe: 14.07.2020, 12 Uhr

WWU

Aufgabe 29: Zweidimensionales Bosonengas [7 Punkte]

Gegeben sei ein zweidimensionales Gas von N wechselwirkungsfreien Bosonen mit Spin 0, die sich in einer Fläche A befinden und die Einteilchenenergien $\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ besitzen.

a) Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle \hat{N} \rangle$ in Abhängigkeit von der Fugazität $z = e^{\beta\mu}$. Stellen Sie Ihr Resultat zunächst mit Hilfe von $g_n(z)$ dar. In diesem Fall lässt sich das entsprechende $g_n(z)$ exakt berechnen. Machen Sie das, indem Sie z. B. die Substitution $y = \dfrac{1}{z} e^x$ benutzen.

b) Kann bei diesem Gas eine Bose-Einstein-Kondensation auftreten? Falls dies der Fall ist, so geben Sie die Übergangstemperatur T_c an.

Aufgabe 30: Bosegas mit linearer Dispersion [7 Punkte]

a) In einem Volumen V befinden sich N wechselwirkungsfreie Bosonen mit Spin 0 und Einteilchenenergien $\varepsilon_{\vec{k}} = \varepsilon_{|\vec{k}|} = c\hbar k$. Berechnen Sie die mittlere Teilchenzahl $\langle \hat{N} \rangle$ in Abhängigkeit von $z = e^{\beta\mu}$. Kann bei diesem Gas eine Bose-Einstein-Kondensation auftreten? Falls dies der Fall ist, so geben Sie die Übergangstemperatur T_c an.

b) Führen Sie die entsprechenden Rechnungen und Überlegungen für ein zweidimensionales Bosegas mit linearer Dispersion aus N Teilchen in der Fläche A durch.

Aufgabe 31: Wärmekapazität von Pseudobosonen [6 Punkte]

Für Pseudobosonen ist die Teilchenzahl keine Erhaltungsgröße und das chemische Potential verschwindet. In dieser Aufgabe soll die Wärmekapazität C_V von Pseudobosonen in ein, zwei und drei Raumdimensionen berechnet werden. Die Energiedispersion der Teilchen habe die Form

$$\epsilon_k = B_\ell \, k^\ell \, .$$

Dabei ist B_ℓ eine Konstante mit der Dimension „Energie $\cdot$ (Länge)$^\ell$“.

Bei den Rechnungen können Sie ausnutzen, dass sich die Summe über alle Zustände bei γ Raumdimensionen in der Form

$$\sum_j \;\rightarrow\; \alpha \, \frac{V_\gamma}{(2\pi)^\gamma} \, W_\gamma \int_0^\infty k^{\gamma-1} \, dk$$

darstellen lässt. Der Faktor α gibt den Entartungsgrad der Zustände an. Dabei ist V_1 eine Länge, V_2 eine Fläche und V_3 ein Volumen. Die Raumwinkelelemente haben die Werte $W_1 = 2$, $W_2 = 2\pi$ und $W_3 = 4\pi$.

a) Berechnen Sie die Energie $E = \sum_j \epsilon_j \, \bar{n}_j$ der Pseudobosonen in Abhängigkeit von ℓ und γ.

b) Bestimmen Sie die Wärmekapazität und geben Sie explizit für $\ell = 1$ und $\ell = 2$ die Temperaturabhängigkeit von C_V in ein, zwei und drei Raumdimensionen an.

c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für drei Dimensionen und $\ell = 1$ mit der Wärmekapazität des Photonengases.

Hinweis: Für $n > 1$ gilt für die „Bosonenintegrale“ $g_n(1) = \zeta(n)$. Relevante Werte der Zetafunktion ζ sind in Aufgabe 25 angegeben worden.