Aufgabe 1: Gaußintegrale (mündlich)

Bei der theoretischen Behandlung physikalischer Phänomene treten häufig Integrale über Gaußfunktionen in der Form

$$I_n := \int_0^\infty x^n \, \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \, d\, x$$

mit $\alpha > 0$ auf. In der Vorlesung Physik I haben Sie bereits das Integral $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ kennengelernt.

a) Bestimmen Sie durch elementare Integration I_1.

b) Berechnen Sie durch Differentiation nach dem Parameter α die Integrale I_2 und I_3.

c) Bestimmen Sie analog zu b) die Integrale I_n für allgemeine gerade $(n = 2\,k)$ oder ungerade $(n = 2\,k + 1)$ Werte von n $(k = 0, 1, 2, ...)$.

Aufgabe 2: Maxwellverteilung (mündlich)

Die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen eines Gases ist durch

$$f\,(v) = \left(\frac{m}{2\,\pi\,k_B\,T}\right)^{3/2} 4\,\pi\,v^2\,\mathrm{e}^{-\frac{m\,v^2}{2\,k_B\,T}}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_w, die mittlere Geschwindigkeit $\langle v\rangle$, das mittlere Geschwindigkeitsquadrat $\langle v^2\rangle$ und die mittlere kinetische Energie.

b) Bestimmen Sie v_w, $\langle v\rangle$ und $\langle v^2\rangle$ für ein Gas aus He-Atomen bei 300 K.

c) Schreiben Sie das Integral $\int h\,(v)\,f\,(v)\,d\,v$, welches dem Mittelwert der Funktion h entspricht, auf ein Integral $\int h\,(v\,(E))\,\tilde{f}\,(E)\,d\,E$ um , indem Sie die Substitution $E = \frac{1}{2}\,m\,v^2$ verwenden. Die dabei auftretende Funktion $\tilde{f}\,(E)$ gibt die Verteilung der Energie im Gas an.

Aufgabe 3: Vollständiges Differential (mündlich)

Bei thermodynamischen Prozessen sind die geleistete Arbeit und die umgesetzte Wärme im Allgemeinen nicht nur vom Anfangs- und Endzustand des Systems abhängig, sondern auch von der Art der Prozessführung. Mathematisch bedeutet dies, dass die infinitesimalen Änderungen der Arbeit $\delta\,W$ und der Wärme $\delta\,Q$ keine vollständigen (totalen) Differentiale sind. In dieser Übungsaufgabe sollen die Eigenschaften von vollständigen und unvollständigen Differentialen genauer betrachtet werden.

a) Berechnen Sie für die Funktion $f\,(x,\,y) = 3\,x^2\,y^3 + 2\,y^2$ das vollständige Differential

$$d\,f\,(x,\,y) = \frac{\partial\,f\,(x,\,y)}{\partial\,x}\,d\,x + \frac{\partial\,f\,(x,\,y)}{\partial\,y}\,d\,y := \left.\frac{\partial\,f}{\partial\,x}\right|_y d\,x + \left.\frac{\partial\,f}{\partial\,y}\right|_x d\,y$$

b) Gegeben sei das Differential $\delta f(x, y) = a(x, y)\,dx + b(x, y)\,dy$. Welche Bedingungen müssen $a(x, y)$ und $b(x, y)$ erfüllen, damit δf ein vollständiges Differential ist?

c) Überprüfen Sie für die Differentiale $\delta f(x, y)$:

i) $\delta f = y\,dx + x\,dy$

ii) $\delta f = y\,dx - x\,dy$

iii) $\delta f = 2\,x\,y\;dx$

iv) $\delta f = x^2\,dx$

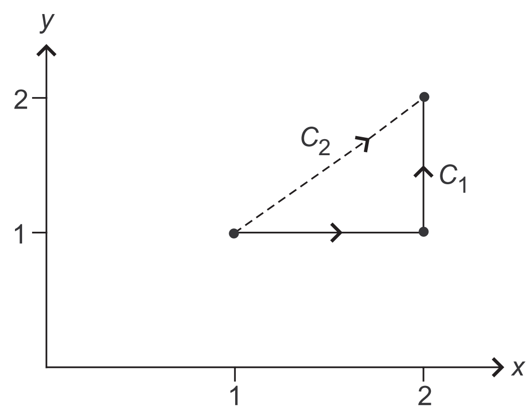
ob es sich um vollständige Differentiale handelt. Berechnen Sie gegebenfalls $f(x, y)$.

d) Sei $\displaystyle\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \delta f$ das Integral entlang eines Weges C, der vom Punkt (x_0, y_0) zum Punkt (x_1, y_1) führt. Prüfen Sie für

i) $\delta f = (x^2 - y)\,dx + x\,dy$

ii) $\delta f = \dfrac{1}{x^2}\left\{(x^2 - y)\,dx + x\,dy\right\}$

ob das jeweilige Integral vom Weg abhängt. Bestimmen Sie für beide Differentiale das Integral I entlang der Wege C_1 und C_2, die von (1, 1) nach (2, 2) führen.



Aufgabe 4: Barometrische Höhenformel (schriftlich, 5 Punkte)

Ein Gas befinde sich bei der Temperatur T in einem Behälter mit Querschnittsfläche A und Höhe h. Aufgrund der Schwerkraft ergibt sich in der Höhe z der Druck zu

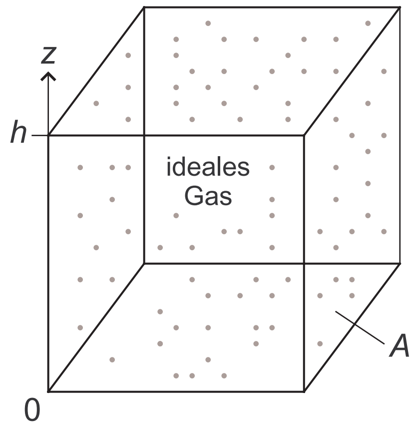
$$p(z) = \frac{1}{A}\int\limits_z^h \rho(\tilde{z}) \cdot A \cdot g \cdot d\tilde{z}$$

Dabei ist $\rho(\tilde{z})$ die von der Höhe abhängige Massendichte des Gases. Da p und $\rho = \dfrac{m}{v}$ außerdem über die thermische Zustandsgleichung miteinander gekoppelt sind, ist es zweckmäßig, zur Berechnung des Drucks die obige Integralgleichung zunächst in eine Differentialgleichung umzuschreiben und diese dann zu lösen.

a) Was folgt aus der obigen Gleichung für $\frac{dp}{dz}$? Lösen Sie die resultierende Differentialgleichung für ein *ideales* Gas und bestimmen Sie $p(z)$ mit $p(z=0) = p_0$.

b) Was ergibt sich dann für $\rho(z)$?

c) Bei $p_0 = 1$ atm $= 101,3$ kPa beträgt die Dichte von Luft $1,24\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. In welcher Höhe ist $p(z)$ auf $\frac{1}{e} \cdot p_0$ abgefallen?

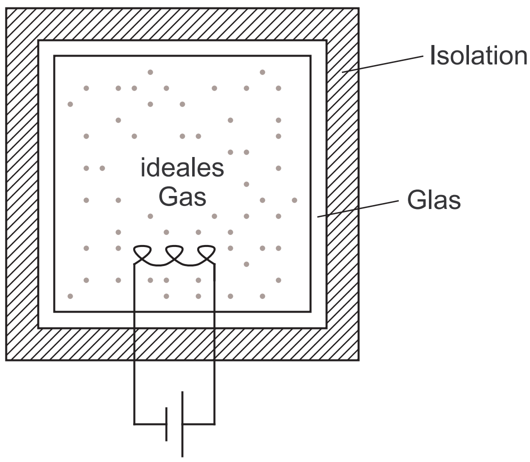


Aufgabe 5: Ideales Gas (schriftlich, 5 Punkte)

In einem Behälter aus Glas, der nach außen thermisch isoliert ist, befindet sich 1 l des Gases Argon bei einer Temperatur von 273,15 K und einem Druck von $1,01325 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Das Glas hat eine spezifische Wärme von $0,6\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$. Der Behälter wiegt 100 g. Betrachten Sie Argon in dieser Aufgabe als monoatomares ideales Gas.

a) Welche Masse hat das eingeschlossene Gas?

b) Dem System wird über einen Heizwiderstand die Energie 1 J zugeführt. Berechnen Sie die Temperatur und den Druck des Gases i) ohne und ii) mit Berücksichtigung der Wärmekapazität des Glasbehälters.



Aufgabe 6: **Kompression eines idealen Gases** **(mündlich, 5 Punkte)**

Ein Behälter, der im Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T steht, enthält 10 l eines idealen Gases bei einem Druck von $p_0 = 2\,\text{bar} = 2 \cdot 10^5\,\text{Pa}$. Durch ein Gewicht auf einem beweglichen Kolben wird ein externer Druck auf das Gas ausgeübt.

a) Wie groß muss ein äußerer Druck p_1 mindestens sein, damit das Gas auf 5 l komprimiert wird? Welche Arbeit wird geleistet, wenn mit konstantem Druck p_1 diese Kompression durchgeführt wird?

b) Führen Sie die Kompression zunächst mit einem Druck $p_2 = 3$ bar durch. Welches Volumen wird dabei angenommen? Verdichten Sie dann mit dem Druck aus a) weiter auf ein Volumen von 5 l. Welche Arbeit wird in diesen beiden Schritten der Kompression geleistet?

c) Wie muss die Kompression von 10 l auf 5 l durchgeführt werden, damit die geleistete Arbeit minimal wird? Berechnen Sie diese.

Diskutieren Sie Ihre Resultate anhand eines $p - V$-Diagramms.