Aufgabe 38: Wärmeströme (mündlich, 10 Punkte)

a) Ein würfelförmiger Behälter habe ein Innenvolumen von 1 m^3. Seine Wände haben eine Isolierschicht von $l = 5$ cm Dicke mit einer Wärmeleitfähigkeit (Wärmeleitzahl) λ. Eine Heizleistung von $P = 250$ W wird benötigt, um das Wasser bei einer Umgebungstemperatur von $T_1 = 20°$ C auf einer Temperatur von $T_2 = 90°$ C zu halten.

i) Wie groß ist die Wärmeleitfähigkeit der Isolierschicht? (Der spezielle Temperaturverlauf entlang der Würfelkanten soll dabei nicht berücksichtigt werden.)

ii) Wie sinkt die Wassertemperatur $T\,(t)$ zeitlich ab, wenn die Heizung abgestellt wird? Wie lange dauert es, bis die Temperatur auf 55° C abgesunken ist? (Die Wärmekapazität der Isolierschicht soll vernachlässigt werden.)

b) In einem Teich habe das Wasser die Temperatur $T_1 = 0°$ C. Die Lufttemperatur darüber sei $T_2 = -10°$ C. Berechnen Sie die Dicke des Eises 24 Stunden nach dem Einsetzen des Gefrierens.

- Wärmeleitfähigkeit von Eis: $2,2\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}$
- Dichte von Eis: $0,9\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
- spezifische Schmelzwärme von Eis: $\tilde{Q}_{\mathrm{Schmelz}} = 334,80\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}}$

Aufgabe 39: Temperaturschwankungen an der Erdoberfläche (schriftlich, 12 Punkte)

Zur Beschreibung der jährlichen Temperaturschwankungen unterhalb der Erdoberfläche gehen wir von folgendem Modell aus: Die Erdoberfläche wird als Oberfläche eines Halbraumes ($x \leq 0$) angesehen. Bei $x = 0$ wird als Randbedingung der Temperaturverlauf

$$T = T_0 - T_1\,\cos\left(\omega_1\,t\right)$$

vorgegeben ($T_0 = 8°$ C, $T_1 = 10°$ C, $\omega_1 = \frac{2\,\pi}{1\ \mathrm{Jahr}}$, Temperaturleitzahl $a = 0,006\ \frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}}$).

a) Bestimmen Sie die Temperatur $T\,(x,\,t)$ als Funktion von Ort und Zeit.

b) In welcher Tiefe ist die Amplitude der Temperaturwelle auf den e-ten Teil des Maximalwertes abgesunken?

c) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Temperaturwelle?

d) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf $T\,(x)$ mit $0 \geq x \geq -20$ m für Januar ($t = 0$), April, Juli und Oktober.

e) Betrachten Sie jetzt die tägliche Temperaturschwankung

$$T = T_0 + T_2\,\cos\left(\omega_2\,(t - t_2)\right)\ , \qquad \left(T_2 = 9°\ \mathrm{C},\ \omega_2 = \frac{2\,\pi}{24\ \mathrm{h}},\ t_2 = 14\ \mathrm{h}\right)\ .$$

Wie tief dringt diese Welle relativ zur jährlichen Temperaturschwankung in die Erde ein?

f) Geben Sie $T\,(x,\,t)$ für eine Oberflächentemperatur von

$$T\,(0,\,t) = T_0 - T_1\,\cos(\omega_1\,t) + T_2\,\cos(\omega_2\,(t - t_2))$$

an.

g) In welcher Tiefe muss man Wasserrohre verlegen, um vor dem Frost sicher zu sein? In welcher Tiefe sollte ein Weinkeller angelegt werden, damit die Temperaturschwankungen kleiner als 1° C sind? In welcher Tiefe ist es im Januar am wärmsten?

Aufgabe 40: Wärmeleitung (schriftlich, 8 Punkte)

Der Temperaturverlauf in einem homogenen, nach außen wärmeisolierten (oder unendlich ausgedehnten) Stab hat bei gegebener Anfangsbedingung $T_0\,(x) = T\,(x,\,0)$ die Form:

$$T\,(x,\,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{T_0\,(x')}{\sqrt{4\,\pi\,a\,t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x'-x)^2}{4\,a\,t}}\,d\,x'\ .$$

Dabei ist a die Temperaturleitzahl.

a) Zeigen Sie, dass $T\,(x,\,t)$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

b) Betrachten Sie eine Wärmeverteilung, die bei $t = 0$ die Gestalt

$$T_0\,(x) = T_1\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{b^2}}$$

hat. Berechnen Sie den Temperaturverlauf $T\,(x,\,t)$. Benutzen Sie dabei, dass gilt:

$$\mathrm{e}^{-\alpha\,y^2}\,\mathrm{e}^{-\beta\,(y-B)^2} = \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)\left(y-\frac{\beta\,B}{\alpha+\beta}\right)^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha\,\beta}{\alpha+\beta}\,B^2}\ .$$

c) Skizzieren Sie $T\,(x,\,t)$ für verschiedene Zeiten.

Nicht vergessen!

Eine Anmeldung im QISPOS zur Vorlesung Physik II und zu den Übungen zur Physik II ist unbedingt **bis zum 29.05.2009** erforderlich, damit die entsprechenden Leistungspunkte verbucht werden können!