Aufgabe 41: Fehlerfunktion (mündlich, 9 Punkte)

Bei der theoretischen Behandlung von Wärmeleitungsproblemen tritt häufig ein Integral über Gaußfunktionen in der Form

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2}\, dy = \operatorname{erf}(x)$$

auf, das man als „error function" $\operatorname{erf}(x)$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\operatorname{erf}(\infty) = 1 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{erf}(x) = -\operatorname{erf}(-x)\ .$$

b) Beweisen Sie die folgende Beziehung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2}\, dy = 1 - \operatorname{erf}(x)\ .$$

c) Drücken Sie die folgenden Integrale durch $\operatorname{erf}(x)$ aus:

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-y^2}\, dy\ , \qquad I_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+x} e^{-y^2}\, dy$$

und

$$I_3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x'-x)^2}{4\,a\,t}}\, dx'\ .$$

d) Berechnen Sie die Ableitung $\frac{d}{dx}\operatorname{erf}(x)$.

e) Skizzieren Sie $\operatorname{erf}(x)$.

Aufgabe 42: Wärmeleitung in einem halbunendlichen Stab (mündlich, 11 Punkte)

Die Temperaturverteilung eines halbunendlichen Stabes, der sich im Bereich $0 \leq x < \infty$ befindet, lässt sich mit Hilfe der in Aufgabe 40 angegebenen Darstellung der Temperatur berechnen. Dazu geht man von einem *unendlich* langen Stab aus und wählt die Anfangstemperatur $T_0(x)$ so, dass für $x > 0$ die Anfangsverteilung und für $x = 0$ die Randbedingung des *halbunendlichen* Stabes erfüllt werden.

Der halbunendliche Stab habe zunächst die Temperatur T_1. Zur Zeit $t = 0$ wird das linke Ende des Stabes bei $x = 0$ an ein Wärmebad mit der Temperatur T_2 angekoppelt.

a) Begründen Sie, warum

$$T_0(x) = \begin{cases} 2\,T_2 - T_1 & \text{für} \quad x < 0 \\ T_2 & \text{für} \quad x = 0 \\ T_1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

für dieses Problem eine geeignete Anfangsverteilung des unendlichen Stabes ist.

b) Berechnen Sie $T(x,\, t)$ und drücken Sie Ihr Resultat mit Hilfe der Fehlerfunktion $\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\,a\,t}}\right)$ aus.

c) Skizzieren Sie $T(x,\, t)$ in Abhängigkeit von x für verschiedene Werte von t.

d) Zu welcher Zeit $\tilde{t}$ ist für einen sehr langen Eisenstab $\left(a = 22{,}8 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right)$ mit $T_1 = 20°$ C und $T_2 = 100°$ C die Temperatur bei i) $x = 1$ cm und ii) $x = 1$ m auf 60° C gestiegen?

Hinweis: $\mathrm{erf}\,(0{,}48) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 43: Integralsatz von Gauß (schriftlich, 8 Punkte)

a) Ein Quader sei durch die Ungleichungen $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$ und $0 \le z \le 1$ definiert. Berechnen Sie explizit die linke und die rechte Seite des Integralsatzes

$$\oint\limits_{\text{OF von } V} \vec{a}\,(\vec{r}\,) \cdot d\,\vec{f} = \int\limits_V \mathrm{div}\,\vec{a}\,(\vec{r}\,)\,d\,V \qquad \text{für} \qquad \vec{a}\,(\vec{r}\,) = (x^2,\, -y - z,\, 0)\ .$$

b) Ein Vektorfeld

$$\vec{a}\,(\vec{r}\,) = \left(x\,(z - \mathrm{e}^{x\,z}),\, -1 - y\,z,\, z\,\mathrm{e}^{x\,z} + z^3\right)$$

sei gegeben. Berechnen Sie den Fluss dieses Feldes durch die Oberfläche des unter a) gegebenen Quaders.

Aufgabe 44: Wärmefluss durch Oberflächen (schriftlich, 12 Punkte)

a) Gegeben sei eine Kugel vom Radius R, deren Mittelpunkt bei $\vec{r} = \vec{0}$ liegt. Im Mittelpunkt der Kugel ist eine punktförmige Heizquelle, die eine Wärmestromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r}\,) = J\,\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r$ erzeugt. Dabei ist J eine Konstante. Berechnen Sie den Wärmefluss durch die Oberfläche der Kugel.

b) Gegeben sei ein Zylinder mit Radius R_1, dessen Längsachse sich von $\vec{r} = (0,\, 0,\, 0)$ bis $\vec{r} = (0,\, 0,\, b)$ erstreckt. Die Mantelfläche des Zylinders habe die Temperatur T_1. Im Inneren des Zylinders befindet sich auf der Längsachse ein zylinderförmiger Draht mit Radius R_2, der die konstante Temperatur T_2 habe.

i) Zeigen Sie, dass im stationären Zustand die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für dieses System durch

$$T\,(\vec{r}\,) = A + B\,\ln\,\sqrt{x^2 + y^2}$$

gegeben ist. Dabei sind A und B Konstanten. Bestimmen Sie diese durch Anpassung an die angegebenen Randbedingungen.

ii) Berechnen Sie die Wärmestromdichte im Zylinder bei räumlich konstanter Wärmeleitfähigkeit λ.

iii) Bestimmen Sie den Fluss der Wärmestromdichte durch die Oberfläche des Zylinders.

Hinweis: Vernachlässigen Sie alle Effekte, die von den Deckelflächen des Zylinders verursacht werden.