Aufgabe 45: Vergleich von Coulombkraft und Gravitationskraft (mündlich, 4 Punkte)

a) Mit welcher Kraft ziehen sich ein Proton und ein Elektron elektrostatisch an, wenn der Abstand zwischen ihnen $r \simeq 0,53\ \mathring{\mathrm{A}} = 5,3 \cdot 10^{-10}$ m beträgt? Die Ladung des Protons beträgt $e_0 = 1,609 \cdot 10^{-19}$ As, die des Elektrons $-e_0$. Wie groß ist das elektrostatische Potential des Protons in diesem Abstand?

b) Wie groß ist das Verhältnis der zwischen Proton und Elektron wirkenden Gravitationskraft zur elektrostatischen Kraft?

(Masse des Protons: $m_P = 1,675 \cdot 10^{-27}$ kg; Masse des Elektrons: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg)

Aufgabe 46: Dirac'sche Deltafunktion (mündlich, 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die Deltafunktion im Sinne von

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x) = 0 \qquad \text{für} \qquad x \neq 0$$

und (für $a < b$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b g_\varepsilon(x)\, f(x)\, dx = \int_a^b \delta(x)\, f(x)\, dx = \begin{cases} f(0) & \text{für } a < 0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

durch

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}}$$

darstellen lässt.

Aufgabe 47: Anwendungen der Deltafunktion (schriftlich, 5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $$\int_{-1}^{4} (x^3 + 2x - 2)\, \delta(x-2)\, dx$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 3)\, \delta(-4x)\, dx$$

c) $$\int_{2}^{10} x^2\, \delta(x^2 - 6x + 5)\, dx$$

d) $$\int_{\mathbb{R}^3} (3r^2 - \vec{r} \cdot \vec{r}_0)\, \delta\left(\frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{r}_0)\right) d^3 r$$

Aufgabe 48: Elektrisches Feld einer Kugelschale (mündlich, 10 Punkte)

Das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist durch das Integral

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3 r'$$

gegeben. Berechnen Sie $\varphi(\vec{r})$ und das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ für eine homogen geladene Kugelschale mit Innenradius R_1 und Aussenradius R_2, d. h.

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r < R_1 \\ \rho_0 & \text{für} \quad R_1 \le r \le R_2 \\ 0 & \text{für} \quad r > R_2 \end{cases}$$

Hinweis: $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\,\cos\vartheta'}$.

Drücken Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Gesamtladung Q der Kugel aus.

Aufgabe 49: Elektrisches Feld einer inhomogenen, radialsymmetrischen Ladungsverteilung (schriftlich, 10 Punkte)

Gegeben sei eine homogen geladene Kugel mit Radius R, die von einer positiven, schnell abfallenden, radialsymmetrischen Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q\,R}{4\pi}\frac{1}{r^4} \qquad \text{für} \qquad r > R$$

umgeben ist. Die Kugel trage die Ladung $-Q$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß'schen Satzes das elektrische Feld im gesamten Raumbereich.

b) Bestimmen Sie das zugehörige Potential $\varphi(\vec{r})$ mit $\varphi(\infty) = 0$.

Aufgabe 50: Potential eines endlich langen Drahtes (schriftlich, 5 Punkte)

Gegeben sei ein unendlich dünner Draht der Länge a mit der Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0\,\delta(x)\,\delta(y) & \text{für } -\frac{a}{2} \le z \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie das Potential $\varphi(\vec{r})$ des Drahtes.

b) Skizzieren Sie $\varphi(\vec{r})$ in Abhängigkeit vom Abstand $d = \sqrt{x^2+y^2}$ für $z = 0$, $z = \frac{a}{2}$ und $z = a$.