

Aufgabe 5: Produktregel**(3 Punkte)**

Sei dF ein vollständiges Differential, wobei $F(x, y)$ als Produkt der Funktionen $f(x, y)$ und $g(x, y)$ gegeben sei. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$dF(x, y) = f(x, y) \cdot dg(x, y) + g(x, y) \cdot df(x, y).$$

Aufgabe 6: Funktionalrelation und Rechenregeln für partielle Ableitungen**(8 Punkte)**

Seien x, y, z Größen, die eine Funktionalrelation $f(x, y, z) = 0$ erfüllen. Dann lässt sich eine der drei Variablen als Funktion der anderen auffassen, d. h.:

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z) \quad \text{oder} \quad z = z(x, y).$$

Weiterhin sei w eine Funktion, die von irgend zwei dieser Größen, z. B. $w = w(y, z)$, abhängt.

Zeigen Sie, dass folgende Rechenregeln, die sich in der phänomenologischen Thermodynamik immer wieder als sehr nützlich erweisen werden, gelten:

- a) $\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z = \frac{1}{\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_z},$
- b) $\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z \cdot \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_x \cdot \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_y = -1$ (Kettenregel),
- c) $\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z = \left. \frac{\partial x}{\partial w} \right|_z \cdot \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_z,$
- d) $\left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_z = \left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_w + \left. \frac{\partial x}{\partial w} \right|_y \cdot \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_z.$

Hinweis: Beachten Sie, dass zwei der drei Variablen x, y, z frei wählbar sind. Bilden Sie z. B. dx und dy und setzen Sie dy in dx ein. Nutzen Sie weiterhin aus, dass aus $w = w(y, z)$ die Umkehrungen $y = y(z, w)$ und $z = z(y, w)$ eindeutig folgen sollen.

Aufgabe 7: Kombinatorik**(4 Punkte)**

Gegeben sei eine Anordnung von $2n$ magnetischen Momenten, die jeweils zwei entgegengesetzte Einstellmöglichkeiten – im Folgenden als \uparrow und \downarrow bezeichnet – haben. Das gesamte magnetische Moment der Anordnung sei Null, d. h. dass die Anzahl der \uparrow -Momente (n_\uparrow) gleich der Anzahl der \downarrow -Momente (n_\downarrow) sein soll.

- a) Berechnen Sie die Anzahl Z der möglichen Realisierungen für $n_\uparrow = n_\downarrow$.
- b) Was ergibt sich z. B. für $n = 1, 2, 3, 4, 8, 16$ und 20 ? Berechnen Sie auch den natürlichen Logarithmus von Z und wundern Sie sich.
- c) Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie z. B. für $n = 2$ die möglichen Realisierungen zeichnen.

Hinweis: Beim Lotto gibt es $\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot \dots \cdot 44}{1 \cdot \dots \cdot 6}$ Möglichkeiten, 6 Zahlen aus 49 zu wählen.

Aufgabe 8: Eigenschaften der Fundamentalrelation**(5 Punkte)**

Die zehn nachfolgenden Gleichungen sind angeblich Fundamentalrelationen verschiedener thermodynamischer Systeme. Fünf davon sind aber falsch, d. h. sie verletzen eines der Postulate II, III oder IV. Finden Sie die jeweils verletzten Postulate und bringen Sie die übrigen Fundamentalrelationen in die Form $U = U(S, V, N)$. (V_0 , Θ und R sind positive Konstanten.)

$$1. \quad S = \left[\frac{R^2}{V_0 \Theta} \right]^{\frac{1}{3}} [N V U]^{\frac{1}{3}},$$

$$2. \quad S = \left[\frac{R}{\Theta^2} \right]^{\frac{1}{3}} \left[\frac{N U}{V} \right]^{\frac{2}{3}},$$

$$3. \quad S = \left[\frac{R}{\Theta} \right]^{\frac{1}{2}} \left[N U - \frac{R \Theta V^2}{V_0^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$4. \quad S = \left[\frac{R^2 \Theta}{V_0^3} \right] \frac{V^3}{N U},$$

$$5. \quad S = \left[\frac{R^3}{V_0 \Theta^2} \right]^{\frac{1}{5}} [N^2 V U^2]^{\frac{1}{5}},$$

$$6. \quad S = N R \ln \left[\frac{U V}{N^2 R \Theta V_0} \right],$$

$$7. \quad S = \left[\frac{R}{\Theta} \right]^{\frac{1}{2}} [N U]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{V^2}{2 N^2 V_0^2} \right],$$

$$8. \quad S = \left[\frac{R}{\Theta} \right]^{\frac{1}{2}} [N U]^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{U V}{N R \Theta V_0} \right],$$

$$9. \quad U = \left[\frac{V_0 \Theta}{R} \right] \frac{S^2}{V} \exp \left[\frac{S}{N R} \right],$$

$$10. \quad U = \left[\frac{R \Theta}{V_0} \right] N V \left[1 + \frac{S}{N R} \right] \exp \left[-\frac{S}{N R} \right].$$