Aufgabe 14: Spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck (3 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir definiert

$$C_p := \frac{T}{N} \cdot \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_p ,$$

wobei die Molzahl N festgehalten wurde. Zur Umformung dieses Ausdrucks wurde der 1. Hauptsatz für $dN = 0$, also

$$dU = T\,dS - p\,dV$$

verwendet.

Leiten Sie rein mathematisch mit der üblichen Definition der Temperatur

$$T = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_V$$

und geeigneten Relationen aus Aufgabe 6 das in der Vorlesung angegebene Ergebnis ab.

Aufgabe 15: Fundamentalrelationen und Zustandsgleichungen (5 Punkte)

Aus der Vorlesung ist Ihnen die Fundamentalrelation $S = S(U, V, N)$ für ein einkomponentiges ideales Gas in der Entropiedarstellung bekannt. Es gilt:

$$S(U, V, N) = S_0 \cdot \frac{N}{N_0} + N R \ln \left\{ \left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{C_V}{R}} \cdot \left(\frac{V}{V_0}\right) \cdot \left(\frac{N_0}{N}\right)^{\frac{C_p}{R}} \right\} ,$$

wobei S_0, U_0, V_0 und N_0 Konstanten und C_V, C_p und R positive Konstanten sind.

a) Leiten Sie aus $S = S(U, V, N)$ die Ihnen wohlbekannte thermische und kalorische Zustandsgleichung

$$p = p(T, V, N) \qquad \text{und} \qquad U = U(T, N)$$

des idealen Gases ab.

b) $S(U, V, N)$ und $U(S, V, N)$ sind umkehrbar eindeutig miteinander verknüpft. Leiten Sie aus $S(U, V, N)$ die Fundamentalrelation $U(S, V, N)$ für das ideale Gas in der Energiedarstellung ab.

c) Leiten Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a) und b) die Zustandsgleichungen

$$T = T(S, V, N) , \qquad p = p(S, V, N) \qquad \text{und} \qquad \mu = \mu(S, V, N)$$

in der Energiedarstellung ab.

Hinweis: Verwenden Sie die Aussage aus Aufgabe 9.

Aufgabe 16: Entropie diatomarer idealer Gase (2 Punkte)

Die innere Energie eines idealen Gases ist durch $U = N\,C_V\,T$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Entropie eines einkomponentigen idealen Gases aus diatomaren Molekülen bei Zimmertemperatur in guter Näherung durch

$$S\,(T,\,V,\,N) = N\,R\left\{\tilde{\sigma}_0 + \frac{5}{2}\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) - \ln\left(\frac{N}{N_0}\right)\right\}$$

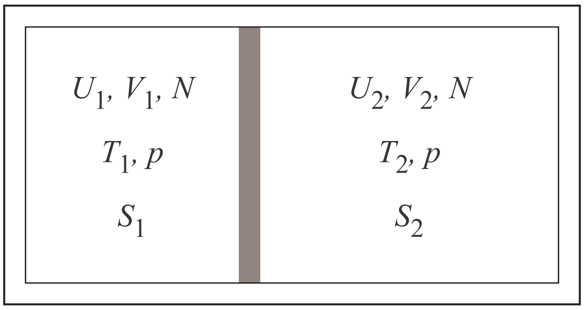
gegeben ist, wobei $\tilde{\sigma}_0$, T_0, V_0 und N_0 Konstanten sind. Die Entropiekonstante

$$\tilde{\sigma}_0 := \frac{S_0}{N_0\,R}$$

geht entscheidend in alle Vorgänge ein, bei denen sich die Molzahl ändert.

Aufgabe 17: Durchmischung eines Gases (5 Punkte)

Ein abgeschlossenes Volumen V wird durch eine starre Wand in zwei Bereiche der Größe V_1 und V_2 aufgeteilt. In jedem Teilvolumen befinden sich N Mole desselben einatomigen, idealen Gases. Die Temperatur T_1 und T_2 sind so gewählt, dass der Druck in beiden Teilvolumina $p_1 = p_2 =: p$ ist.



Die starre Wand wird nun seitlich herausgezogen.

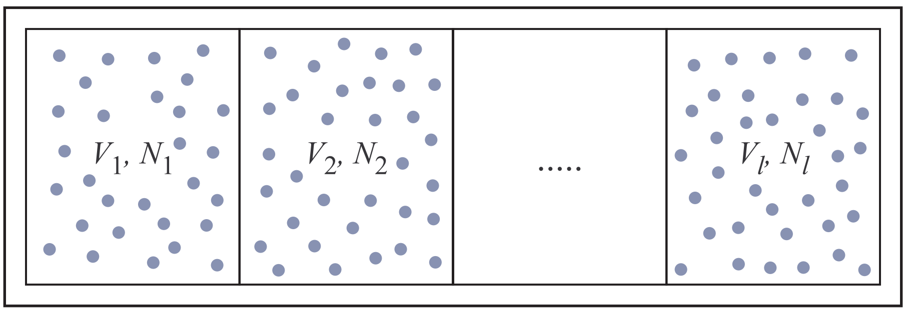
a) Berechnen Sie die Temperatur und den Druck des sich einstellenden Zustandes.

b) Bestimmen Sie die Änderung der Entropie in Abhängigkeit von T_1, T_2 und N.

c) Was ergibt sich für $T_1 = T_2$?

Aufgabe 18: Mischungsentropie (5 Punkte)

Ein abgeschlossenes System bestehe aus l einkomponentigen, zunächst völlig separaten idealen Gasen. In jeder Kammer herrsche gleicher Druck p und gleiche Temperatur T.



Nach Aufgabe 16 ist die Entropie des j-ten Gases im Volumen V_j bei der Temperatur T_j durch

$$S_j\,(T_j,\,V_j,\,N_j) \;=\; N_j\,\left\{R\,\tilde{\sigma}_j \,+\, C_{V_j}\,\ln T_j \,+\, R\,\ln V_j \,-\, R\,\ln N_j\right\}$$

gegeben, wobei T_j, V_j und N_j dimensionslose, reduzierte Variable, z. B. $T_j \,\widehat{=}\, T_j/T_0$ aus Aufgabe 16, sind.

a) Entfernen Sie nun die starren Wände zwischen allen l idealen Gasen, so dass sich diese im Gesamtvolumen V irreversibel durchmischen. Berechnen Sie die Gesamtentropie

$$S \;=\; S\,(U,\,V,\,\{N_j\})\;.$$

b) Berechnen Sie den Gesamtdruck des bei T in V durchmischten Systems

$$p \;=\; p\,(T,\,V,\,\{N_j\})\;.$$

c) Berechnen Sie die Gesamtentropie für die Mischung der l idealen Gase bei der Temperatur T und festem Druck p nach b).

d) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus c) mit der Gesamtentropie vor der Entfernung der Trennwände. Diskutieren Sie den Zusatzterm, die Mischungsentropie.

e) Berechnen Sie die Mischungsentropie für zwei identische Gase mit

$$N_1 \;=\; N_2 \;=\; \frac{N}{2}\;.$$

Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.