Aufgabe 25: Würfelspiel mit zwei Würfeln (2 Punkte)

Wie groß ist bei einem Würfelspiel, bei dem mit zwei Würfeln gespielt wird, die Wahrscheinlichkeit, als Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen den Wert n mit $2 \leq n \leq 12$ zur erhalten?

Aufgabe 26: Gemeinsamer Geburtstag (2 Punkte)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P_N dafür, dass von N Studierenden mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben? Was ergibt sich für $N = 8$ und $N = 45$? Bei welcher Mindestanzahl N_{min} übersteigt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Studierende am gleichen Tag Geburtstag haben, den Wert 0,5? Unter den Studierenden seien keine Zwillinge, Drillinge, ... Rechnen Sie mit 365 Tagen pro Jahr.

Aufgabe 27: Limites der Binominalverteilung (3 Punkte)

In jungen Jahren kommt ein frischgebackener Bundesligastürmer n-mal monatlich zum Einsatz. Als Ausgang eines Spiels gebe es in jedem Fall nur zwei Möglichkeiten, nämlich dass er mindestens ein Tor schießt (erfolgreicher Ausgang) oder dass er kein Tor schießt (kein erfolgreicher Ausgang). Wir setzen voraus, dass der Spieler gute Nerven hat, so dass sein Erfolg im l-ten Spiel nicht vom Ausgang der vorherigen Spiele oder von anderen Randbedingungen abhängt. (Dies ist natürlich eine starke Idealisierung!) Außerdem unterliege er keinerlei Schwankungen in der Tagesform, so dass die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen (p) oder erfolglosen (q) Spielverlauf jedesmal den gleichen Wert hat.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P_n(j)$ an, dass bei n Spielen j erfolgreich (nicht erfolgreich) verlaufen. Wie groß ist die mittlere Zahl erfolgreich (nicht erfolgreich) verlaufender Spiele bei n Einsätzen?

b) Für große n kann die in a) gefundene Verteilung durch eine kontinuierliche Funktion einer kontinuierlichen Variablen x approximiert werden:

$$P(x) = \frac{1}{\{2\pi n p q\}^{1/2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}} .$$

Zeichnen Sie die Verteilung aus a) für $n = 8$ (vier englische Wochen) und $p = \frac{1}{2}$ und zeichnen Sie $P(x)$ in das gleiche Bild.

c) Im Laufe der Jahre erzielt unser Stürmerstar bei seinen Spielen eine sehr hohe Perfektion, so dass schließlich gilt: $p \approx 1$, $q \ll 1$ mit $n \cdot q = \lambda =$ konstant.

Spiele mit nicht erfolgreichem Ausgang werden sehr unwahrscheinlich und nehmen damit den Charakter von Betriebsunfällen, d. h. von sehr seltenen Ereignissen an. Zeigen Sie, dass die in a) gefundene Verteilung dafür, dass bei n Spielen j nicht erfolgreich verlaufen, im Grenzfall für sehr große n in die Poisson-Verteilung übergeht.

Aufgabe 28: Mittelwerte und Schwankungen (5 Punkte)

Gegeben seien die folgenden diskreten bzw. kontinuierlichen Verteilungen:

$$P_n(j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \qquad \text{mit} \qquad p + q = 1 \qquad \text{(Binomialverteilung)} ,$$

$$P\,(j) = \frac{\lambda^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \qquad \text{mit} \qquad \lambda\,\text{positiv, reell} \qquad \text{(Poisson-Verteilung)}\ ,$$

$$P\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\,\sigma^2}\right\} \qquad \text{mit} \qquad a,\,\sigma\ \text{positiv, reell} \qquad \text{(Gauß-Verteilung)}\ .$$

a) Verifizieren Sie in jedem Fall, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt.

b) Berechnen Sie für jeden Fall den Mittelwert, die Varianz, die Standardabweichung und die relative Abweichung vom Mittelwert.

c) Vergleichen Sie im Fall der Gauß-Verteilung den Mittelwert mit dem wahrscheinlichsten Wert von x.

d) Skizzieren Sie die Poisson-Verteilung für $\lambda = 3$.

Aufgabe 29: Überlagerung zweier Gaußverteilungen (3 Punkte)

Die kombinierte Wahrscheinlichkeitsdichte zweier voneinander unabhängiger Zufallsvariablen x_1 und x_2, deren Einzelwahrscheinlichkeitsdichte jeweils durch eine Gaußverteilung $p_1\,(x_i)$ mit dem Mittelwert $\langle x_i \rangle = a_i$ und der Streuung σ_i für $i = 1, 2$ gegeben ist, sei $p_2\,(x_1,\,x_2)$. Betrachten Sie nun $y = (x_1 - x_2)/2$ und $z = x_1 + x_2$ als neue Variable und berechnen Sie, ausgehend von der kombinierten Wahrscheinlichkeitsdichte $P_2\,(y,\,z)$, durch geeignete Integration die reduzierte Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{P}_1\,(z)$ für die Summenvariable $z = x_1 + x_2$. Geben Sie auch den Mittelwert $\langle z \rangle$ und die Streuung σ_z von $\tilde{P}_1$ an. Um welche normierte Verteilung handelt es sich bei $\tilde{P}_1\,(z)$?

Aufgabe 30: Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung (5 Punkte)

Die Geschwindigkeitsverteilung der Atome eines klassischen monoatomaren Gases ist durch folgende Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben:

$$f\,(\boldsymbol{v}) \;=\; \lambda\,(T)\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{m\,v^2}{k_B\,T}\right\}\ .$$

a) Berechnen Sie zunächst die Normierungskonstante $\lambda\,(T)$. Berechnen Sie dann die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte $p\,(v)$ für den Betrag der Geschwindigkeit. Skizzieren Sie $p\,(v)$ und berechnen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_w.

b) Berechnen Sie die Mittelwerte $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$, $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ und $\langle v \rangle$ und geben Sie diese in Einheiten von v_w an.

c) Wie groß ist die mittlere Energie eines Atoms im Gas?

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\rho\,(E)\,d\,E$ dafür, ein Atom im Energieintervall zwischen E und $E + d\,E$ vorzufinden. Verifizieren Sie damit das Ergebnis aus c).

e) Die Gesamtzahl der Atome in einem Maxwell-Boltzmann Gas sei $n \cdot \int\limits_0^\infty \rho\,(E)\,d\,E$.

Wie groß ist dann der prozentuale Anteil von Atomen bei Zimmertemperatur ($k_B\,T_{\mathrm{Zi}} = 25$ meV), deren Energie größer oder gleich einer Schwellenenergie $E_S = 0,25$ eV ist?