Übungen zur theoretischen Festkörperphysik II - Zettel 5

Sommersemester 2011 Abgabe: 05.07.

Aufgabe 12: Effektive Elektron-Elektron-Wechselwirkung 15P.

Wie betrachten den Hamiltonoperator mit Elektron-Phonon-Wechselwirkung

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{ep} \\ &= \sum_{\vec{k},\sigma} \varepsilon(\vec{k}) c^\dagger_{\vec{k},\sigma} c_{\vec{k},\sigma} + \sum_{\vec{q}} \hbar\omega_{\vec{q}} b^\dagger_{\vec{q}} b_{\vec{q}} + \sum_{\vec{k},\vec{q}\sigma} g_q c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} \left[b_{\vec{q}} + b^\dagger_{-\vec{q}} \right] c_{\vec{k},\sigma}. \end{aligned}$$

a) Als erstes wollen wir die kanonische Transformation

$$H_T = e^{-iS} H e^{iS}$$

durchführen. Dazu benutzen wir, dass gilt:

$$e^{-iS} H e^{iS} = H + i[H,S] - \frac{1}{2}\left[[H,S],S\right] + O(S^3)$$

Man wählt S so, dass gilt

$$i[H_0, S] = -H_{ep}. \tag{1}$$

In welcher Ordnung von dem Kopplungsmatrixelement g_q ist S? Wie lautet H_T, wenn Sie nur Terme bis zur 2. Ordnung in g_q betrachten?

b) Wir machen für S den Ansatz

$$S = i \sum_{\vec{k},\vec{q},\sigma} g_q c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} (\alpha b_{\vec{q}} + \beta b^\dagger_{-\vec{q}}) c_{\vec{k},\sigma}.$$

Wie müssen α und β gewählt werden, damit Gleichung 1 erfüllt ist?

c) Berechnen Sie den Kommutator $[H_{ep}, S]$. Wie lautet dann der Term der effektiven Elektron-Elektron-Wechselwirkung im transformierten Hamiltonian?

d) Wann ist diese Wechselwirkung abstoßend, wann anziehend?

Aufgabe 13: Cooper-Paar-Zustand 5P.

In einem Cooper-Paar haben wir 2 Elektronen zusätzlich zum gefüllten Fermi-See $|\Phi_0\rangle$. Dabei machen wir die Annahme, dass das eine Elektron den Impuls $\vec{k}$ und den Spin σ und das andere Elektron den entgegengesetzen Impuls $-\vec{k}$ und den entgegengesetzen Spin $-\sigma$ hat, d.h.

$$|\Psi_\sigma\rangle = \sum_{\vec{k}} a_\sigma(\vec{k}) c^\dagger_{\vec{k},\sigma} c^\dagger_{-\vec{k},-\sigma} |\Phi_0\rangle.$$

Die Elektronen unterliegen dem Hamiltonian

$$H = \sum_{\vec{k},\sigma} \varepsilon(\vec{k}) c^\dagger_{\vec{k},\sigma} c_{\vec{k},\sigma} - \frac{V_0}{2} \sum_{\vec{k},\sigma,\sigma'} c^\dagger_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} c^\dagger_{-\vec{k}-\vec{q},\sigma'} c_{-\vec{k},\sigma'} c_{\vec{k},\sigma},$$

wobei die zweite Summe nur über $|\varepsilon(\vec{k}+\vec{q})-\varepsilon(\vec{k})| \leq \hbar\omega_D$ (ω_D ist die Debye-Frequenz) läuft. Die Energie der Elektronen in diesem Zustand ist gegeben durch:

$$E = \langle\Psi_\sigma|H|\Psi_\sigma\rangle = \sum_{\substack{\vec{k} \\ k>k_F}} 2\,\varepsilon(\vec{k})|a_\sigma(\vec{k})|^2 - V_0 \sum_{\substack{\vec{k},\vec{q} \\ |\vec{k}+\vec{q}|>k_F}} a_\sigma^*(\vec{k}+\vec{q})\,a_\sigma(\vec{k})$$

Suchen Sie das Minimum von E. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Variieren Sie E nach $a_\sigma^*(\vec{k})$ unter der Nebenbedingung

$$\sum_{\vec{k}} |a_\sigma(\vec{k})|^2 = 1$$

und setzen Sie den erhaltenen Ausdruck gleich Null. Setzen Sie $\sum_{\vec{k}} a_\sigma(\vec{k}) = C = \text{const}$ und lösen Sie dann die Gleichung nach $a_\sigma(\vec{k})$ auf. Summieren Sie über $\vec{k}$ um folgende Gleichung zu erhalten:

$$1 = V_0 \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\varepsilon(\vec{k}) - E}$$

Dazu müssen Sie vorher noch zeigen, dass der Lagrangeparameter gleich der Energie E ist. Dann führen Sie die Summe durch Integration aus ($\sum_{\vec{k}} \to \rho_0(E_F)\int_{E_F}^{E_F+\hbar\omega_D} d\varepsilon$, $\rho_0(E_F)$ ist die Zustandsdichte an der Fermienergie E_F.) Im letzen Schritt lösen Sie nach E auf. Wie lautet die Energie? Betrachten Sie auch den Grenzfall $V_0\rho_0(E_F) \ll 1$.