

Aufgabe 1: Phononen der linearen Kette

(3 Punkte)

Der Hamiltonoperator einer linearen Kette mit Atomen der Masse M im Abstand a habe die Form

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\hat{P}_j^2}{M} + \frac{1}{2} K \sum_j (u_j - u_{j-1})^2 .$$

Zeigen Sie, dass sich mit Hilfe der in der Vorlesung diskutierten Transformation

$$u_j = \sqrt{\frac{\hbar}{NM}} \sum_q \frac{1}{\sqrt{2\omega(q)}} (\hat{a}(q) + \hat{a}^+(-q)) e^{iqR_j} ,$$

mit $R_j = j \cdot a$

$$\hat{P}_j = \sqrt{\frac{\hbar M}{N}} \sum_q \sqrt{\frac{\omega(q)}{2}} \frac{1}{i} (\hat{a}(q) - \hat{a}^+(-q)) e^{-iqR_j}$$

der Hamiltonoperator als Summe von Hamiltonoperatoren harmonischer Oszillatoren darstellen lässt. Benutzen Sie dabei die explizite Form der Dispersionsrelation $\omega(q)$ der linearen Kette.

Aufgabe 2: Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme im Debye-Modell

(4 Punkte)

In einem Debye-Modell mit gleicher Schallgeschwindigkeit v für alle Zweige l wird die wahre Dispersion der Gitterschwingungen durch $\omega_l = v \cdot |\vec{q}|$ genähert. Diese Relation gilt dann nur für $q \leq q_D$ bzw. bis $\omega_D = v \cdot q_D$. Die Debye-Frequenz ω_D ergibt sich aus

$$\int_0^{\omega_D} N(\omega) d\omega = N_{\text{Zelle}} \cdot d \cdot N_B$$

mit

$$N(\omega) = \sum_l \sum_{\vec{q}} \delta(\omega - \omega_l(\vec{q})) \quad (\text{Zustandsdichte}) .$$

Dabei gibt d die Dimension des Systems an und N_B ist die Zahl der Basisatome.

- a) Berechnen Sie in einem solchen Modell die Zustandsdichte $N(\omega)$ für ein ein- bzw. zweidimensionales System (Kette der Länge L bzw. Quadrat der Fläche A) mit einem Atom pro Elementarzelle.
- b) Berechnen Sie mit Hilfe der Zustandsdichten die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme beider Systeme für kleine Temperaturen.

(Wenn Sie in den vorkommenden Integralen so substituieren, dass die Temperatur *vor* dem Integral steht, brauchen Sie die Integrale nicht zu berechnen!)

Nützliches Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n e^x}{(e^x - 1)^2} dx = n! \zeta(n)$$

Die Riemann'sche Zetafunktion hat u. a. die folgenden Werte:

$$\zeta(1) = \infty , \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} , \quad \zeta(3) = 1,202 .$$

Aufgabe 3: Rechnen mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren**(3 Punkte)**

Die Eigenzustände $|w\rangle = |n_1(\vec{q}_1), n_2(\vec{q}_1), \dots\rangle$ des Hamiltonoperators der Phononen

$$\hat{H} = \sum_{l=1}^{3N_B} \sum_{j=1}^{N_{\text{Zelle}}} \hbar \omega_l(\vec{q}_j) \left(\hat{a}_l^+(\vec{q}_j) \hat{a}_l(\vec{q}_j) + \frac{1}{2} \right)$$

lassen sich in der Form

$$|w\rangle = \prod_{l'=1}^{3N_B} \prod_{j'=1}^{N_{\text{Zelle}}} \frac{(\hat{a}_{l'}^+(\vec{q}_{j'}))^{n_{l'}(\vec{q}_{j'})}}{\sqrt{n_{l'}(\vec{q}_{j'})!}} |0\rangle$$

darstellen. Die Operatoren $\hat{a}_l(\vec{q}_j)$ und $\hat{a}_{l'}^+(\vec{q}_{j'})$ erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[\hat{a}_l(\vec{q}_j), \hat{a}_{l'}^+(\vec{q}_{j'})] = \delta_{ll'} \delta_{jj'} .$$

$|0\rangle$ ist der Vakuumzustand mit $\langle 0|0\rangle = 1$.

a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\hat{a}_l(\vec{q}_j) (\hat{a}_l^+(\vec{q}_j))^3 |0\rangle = \alpha (\hat{a}_l^+(\vec{q}_j))^2 |0\rangle$$

ist. Geben Sie den Wert der Zahl α an.

b) Formen Sie den Ausdruck

$$\hat{a}_l(\vec{q}_j) (\hat{a}_{l'}^+(\vec{q}_{j'}))^{n_{l'}(\vec{q}_{j'})}$$

so um, dass alle Erzeugungsoperatoren links von dem Vernichtungsoperator stehen.

c) Zeigen Sie, dass

$$\hat{a}_l(\vec{q}_j) |w\rangle = \sqrt{n_l(\vec{q}_j)} |n_1(\vec{q}_1), \dots, (n_l(\vec{q}_j) - 1), \dots\rangle$$

gilt.