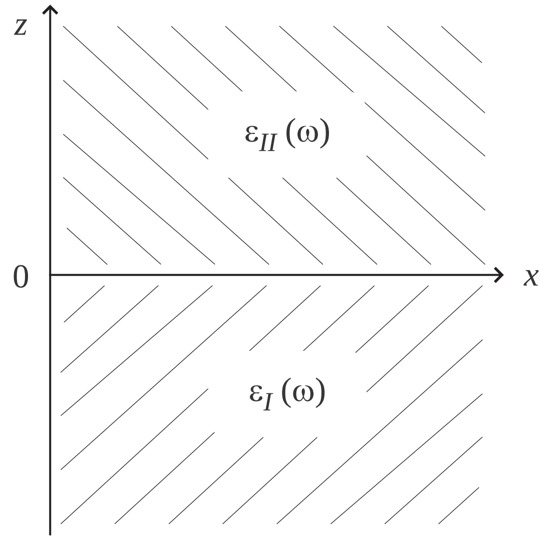
2. Übung zur Festkörpertheorie II – SS 2013 **Prof. Krüger**

Ausgabedatum: 30.04.2013 Abgabedatum: 07.05.2013

Aufgabe 4: Oberflächenpolariton **(4 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen elektromagnetische Felder untersucht werden, die sich parallel zu einer Grenzfläche zwischen zwei Medien (z. B. Kristall-Vakuum) ausbreiten und dabei an der Grenzfläche lokalisiert sind. Das Medium I mit der dielektrischen Funktion $\varepsilon_I(\omega)$ befinde sich im Halbraum $z < 0$, das Medium II mit $\varepsilon_{II}(\omega)$ sei im Halbraum $z > 0$.



a) Betrachten Sie zunächst eine Welle der Form

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{cases} \vec{E}_I \quad e^{ikx}\, e^{+kz}\, e^{-i\omega t} & \text{für} \quad z \le 0 \\ \vec{E}_{II} \quad e^{ikx}\, e^{-kz}\, e^{-i\omega t} & \text{für} \quad z \ge 0 \end{cases}$$

mit

$$\vec{E}_I = E_1\,(i\,k,\,0,\,k) \qquad \text{und} \qquad \vec{E}_{II} = E_2\,(i\,k,\,0,\,-k)\,.$$

i) Verwenden Sie die Stetigkeitsbedingungen der Felder $\vec{E}$ und $\vec{D}$, um eine Bedingungsgleichung mit $\varepsilon_I(\omega)$ und $\varepsilon_{II}(\omega)$ zu erhalten, aus der Sie die möglichen Frequenzen ω bestimmen können.

ii) Betrachten Sie jetzt speziell die Grenzfläche zwischen einem Kristall mit

$$\varepsilon_I(\omega) = \varepsilon(\infty) \cdot \frac{\omega_{LO}^2 - \omega^2}{\omega_{TO}^2 - \omega^2}$$

und dem Vakuum mit $\varepsilon_{II}(\omega) = 1$. Berechnen Sie die an dieser Oberfläche mögliche Schwingungsfrequenz.

b) Untersuchen Sie jetzt das Verhalten einer Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{cases} \vec{E}_I \quad e^{ikx}\, e^{+\alpha_I z}\, e^{-i\omega t} & \text{für} \quad z \le 0 \\ \vec{E}_{II} \quad e^{ikx}\, e^{-\alpha_{II} z}\, e^{-i\omega t} & \text{für} \quad z \ge 0 \end{cases}$$

mit

$$\vec{E}_I \,=\, E_1 \left(i\,k,\, 0,\, \frac{k^2}{\alpha_I} \right) \qquad \text{mit} \qquad E_2 \,=\, \left(i\,k,\, 0,\, -\frac{k^2}{\alpha_{II}} \right) \,.$$

Dabei hängen α_I und α_{II} von k und ω, aber nicht von $\vec{r}$ ab.

i) Verwenden Sie die Wellengleichung rot rot $\vec{E} + \mu_0 \cdot \ddot{\vec{D}} \,=\, 0$ und die Stetigkeitsbedingungen, um eine Bedingungsgleichung mit ε_I, ε_{II}, α_I und α_{II} zu erhalten, aus der die möglichen Schwingungsfrequenzen berechnet werden können.

ii) Betrachten Sie analog zu a) ii) die Wellen an einer Kristalloberfläche. Berechnen Sie die möglichen Schwingungsfrequenzen. Welche Lösungen $\omega^2_{1/2}\,(k)$ der Bedingungsgleichung entsprechen Wellen, die an der Oberfläche lokalisiert sind. Skizzieren Sie für diese $\omega\,(k)$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der aus der Vorlesung bekannten Dispersion der Volumenkristallpolaritonen.

Aufgabe 5: Vertauschungsrelationen (3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{c}_j^+$ und $\hat{c}_j$ für Fermionen kennengelernt. Verwenden Sie Antikommutator-Relationen dieser Operatoren, um folgende Kommutatoren $[\hat{A},\, \hat{B}]_- \,=\, \hat{A}\,\hat{B} \,-\, \hat{B}\,\hat{A}$ zu berechnen.

a)

$$[\hat{n}_j,\, \hat{c}_k]_- \qquad \text{und} \qquad [\hat{n}_j,\, \hat{c}_k^+]_- \qquad \text{mit} \qquad \hat{n}_j \,=\, \hat{c}_j^+\,\hat{c}_j \,.$$

b)

$$[\hat{c}_i^+\,\hat{c}_j,\, \hat{c}_l^+\,\hat{c}_m]_- \,=\, \alpha \cdot \hat{c}_i^+\,\hat{c}_m \,+\, \beta\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_j \,.$$

Berechnen Sie α und β.

c)

$$\begin{aligned} \left[\hat{c}_i^+\,\hat{c}_j\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_m,\, \hat{c}_n^+\,\hat{c}_p\right]_- \;&=\; \left(\alpha \cdot \hat{c}_i^+\,\hat{c}_p + \beta \cdot \hat{c}_n^+\,\hat{c}_j\right)\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_m \\ &+\; \hat{c}_i^+\,\hat{c}_j\,\left(\gamma\,\cdot\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_p \,+\, \zeta \cdot \hat{c}_n^+\,\hat{c}_m\right) \,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie α, β, γ und ζ.

Aufgabe 6: Teilchendichteoperator (3 Punkte)

Der Operator der Teilchendichte hat in der Ortsdarstellung die Form

$$\hat{\rho}\,(\vec{r}\,) \,=\, \sum_{i\,=\,1}^{N} \delta\,(\vec{r} \,-\, \vec{r}_i) \,.$$

a) Transformieren Sie diesen Operator in die Besetzungszahldarstellung $\hat{\rho}_F\,(\vec{r}\,)$ mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{c}_{\vec{k}}^+$ und $\vec{c}_{k'}$.

Verwenden Sie als Einteilchenbasis ebene Wellen der Form

$$\psi_{\vec{k}}\,(\vec{r}\,) \,=\, \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \cdot \mathrm{e}^{i\,\vec{k}\,\vec{r}} \,.$$

Dabei ist Ω das Normierungsvolumen.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $\hat{\rho}_F\,(\vec{r}\,)$

$$\tilde{\hat{\rho}}_F\,(\vec{q}\,) \,=\, \frac{1}{\Omega} \int\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-i\,\vec{q}\,\vec{r}}\,\hat{\rho}_F\,(\vec{r}\,)\,d^3\,r \,.$$