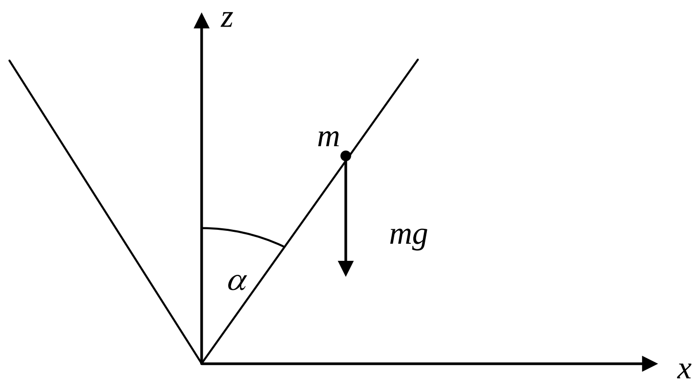
**TE-Aufgabe TE3 (mündlich):** Teilchen auf Kegelmantel (10 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse *m* gleite reibungsfrei an der Innenseite eines auf der Spitze stehenden Kreiskegels mit Öffnungswinkel $2\alpha$ (siehe Skizze). Nach unten wirke die Schwerkraft *mg*.




a) Welchen Zwangsbedingungen ist der Massenpunkt unterworfen? Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

b) Geben Sie die kinetische Energie *T*, die potentielle Energie *V* und die Lagrange-Funktion *L* in Zylinderkoordinaten $(\rho, \varphi, z)$ an. Eliminieren Sie die Koordinate $\rho$ mit Hilfe der Zwangsbedingung.

c) Wie lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für $\varphi$ und *z*? Berechnen Sie den zu $\varphi$ gehörenden generalisierten Impuls $p_\varphi$. Zeigen Sie, dass dieser mit der $z$-Komponente des Drehimpulses übereinstimmt und dass es sich dabei um eine Erhaltungsgröße handelt. Eliminieren Sie $\varphi$ aus den Bewegungsgleichungen unter Verwendung der Erhaltung von $p_\varphi$.

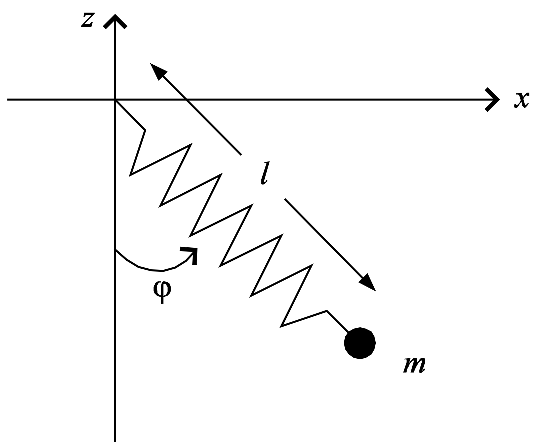
d) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen auch Kreisbahnen als Lösungen haben. Wie müssen die Anfangsbedingungen lauten, um solche Kreisbahnen zu realisieren?

e) Die Bewegungsgleichung für *z* können Sie für kleine Höhenschwankungen $z(t) = z_0 + \xi(t)$ mit $\xi(t) << z_0$ näherungsweise lösen, indem Sie $z^{-3}$ um $z_0$ entwickeln und nach dem Linearglied abbrechen. Wie lautet diese Lösung?

Hilfsformel: $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + ...$ für $x < 1$.

**TE-Aufgabe TE4 (schriftlich):** Schwingungen im Lagrange-Formalismus (10 Punkte)

Ein Massenpunkt der Masse $m$ sei über ein Feder mit Federkonstante $D$ und Ruhelänge $l_0$ an einem festen Punkt, dem Koordinatenursprung, im homogenen Schwerefeld der Erde (Gravitationsbeschleunigung $g$) aufgehängt. Die Masse der Feder sei vernachlässigbar, die Bewegung sei auf die $xz$-Ebene beschränkt (s. Skizze).




a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

b) Bestimmen Sie die kinetische und die potentielle Energie des Systems und geben Sie die Lagrangefunktion an. Wählen Sie als generalisierte Koordinaten den Auslenkungswinkel $\varphi$ und die Federlänge $l$.

c) Stellen Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für $\varphi$ und $l$ auf.

d) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems, d.h. die Lösungen der Bewegungsgleichungen mit $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = \dot{l} = \ddot{l} = 0$. Was können Sie (qualitativ) über die Stabilität der Lösungen sagen?

e) Im Folgenden ist die Lösung der Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen aus der (stabilen) Ruhelage gesucht. Führen Sie hierzu die Auslenkung $r = \ell - \ell_1$ aus der Ruhelage $\ell_1$ als neue Variable ein und vernachlässigen Sie in den Bewegungsgleichungen für $\varphi$ und $r$ alle Terme, in den Produkte oder Potenzen der dynamischen Variablen oder deren Ableitungen auftreten. Verwenden Sie insbesondere die Näherungen

$$\sin\varphi \approx \varphi \quad , \quad \cos\varphi \approx 1 .$$

Geben Sie die so genäherten Bewegungsgleichungen an.

f) Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Bewegungsgleichungen?