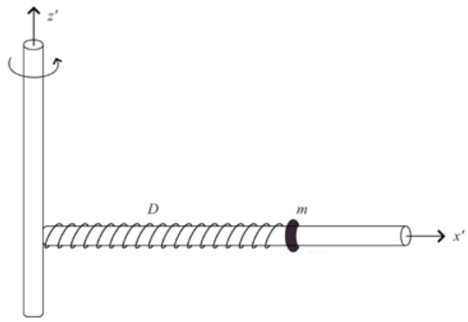
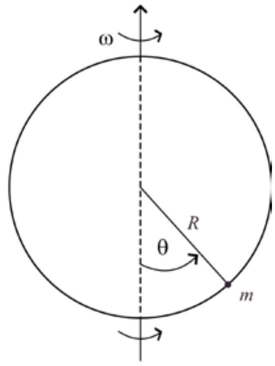
TE-Aufgabe TE5 (mündlich): Lagrange-Formalismus (8 Punkte)

Stellen Sie für die unten beschriebenen Situationen die Zwangsbedingungen und die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen 2. Art auf.

a) Ein Körper mit der Masse m gleite reibungsfrei entlang einer Schiene, welche mit der z-Achse einen rechten Winkel einschließt und mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert. Ferner sei der Körper durch eine Feder mit Federkonstante D und Ruhelänge l_0 mit dem Koordinatenursprung verbunden.



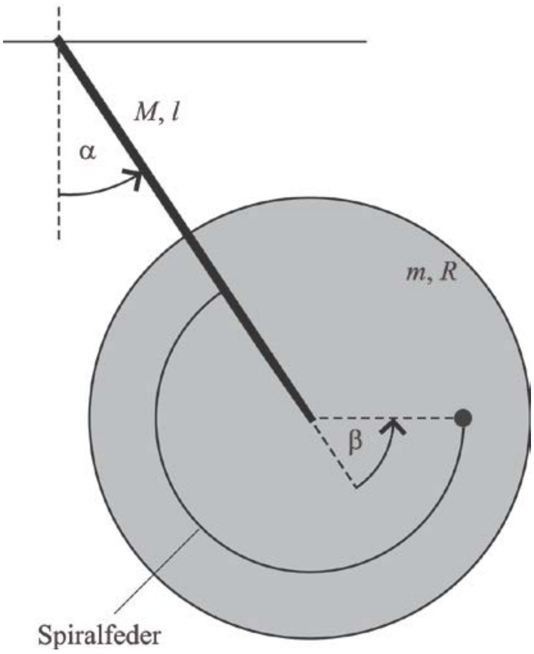
b) Ein Kreisring rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen vertikalen Durchmesser. Auf dem Kreisring kann sich ein Massenpunkt m reibungsfrei bewegen. Das Gravitationsfeld sei homogen.



Vergleich Sie Ihre Ergebnisse mit den Ergebnissen aus den Aufgaben TE1 und TE2.

TE-Aufgabe TE6 (mündlich): Gekoppelte Schwingungen (12 Punkte)

Ein Stab (Masse M, Länge l, konstante Massendichte) hängt an einem Ende im homogenen Schwerefeld der Erde. An seinem freien Ende ist eine Kreisscheibe (Masse m, Radius R, konstante Massendichte, Befestigung im Mittelpunkt der Scheibe) drehbar angebracht. Eine Spiralfeder (Federkonstante D) überträgt ein Moment zwischen Stab und Scheibe.



a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das System?
b) Berechnen Sie die Trägheitsmomente der Kreisscheibe und des Stabs.
c) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf, bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und linearisieren Sie diese. Die linearisierten Bewegungsgleichungen können in der Form
$$\ddot{\alpha} + \Omega^2 \ddot{\beta} + \omega_A^2 \alpha = 0 \qquad \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} + \omega_U^2 \beta = 0$$
dargestellt werden. Identifizieren Sie die in den Gleichungen auftretenden Größen. Unser System ein Modell für eine am Arm getragene mechanische Armbanduhr (warum?). Interpretieren Sie ω_A, ω_U und Ω (Stichwort: Unruh (Uhr)).
d) Lösen Sie die linearisierten Bewegungsgleichungen für $\Omega = 0$. Geben Sie die Eigenfrequenzen sowie die allgemeine Lösung an. Warum ist dies der für die mechanische Armbanduhr relevante Grenzfall und welche Empfehlung folgt aus Ihrer Rechnung für die Konstruktion genau gehender mechanischer Armbanduhren?
e) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen für den Fall $\omega_A = \omega_U = \omega_O, \Omega \neq 0$ (was heißt das?). Benutzen Sie den Ansatz $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t), \beta = \beta_0 \cos(\omega t)$. Bei geeigneten (welchen?) Ω können dann deutliche Schwebungen im System auftreten. Wie groß ist die Schwebungsfrequenz?