Aufgabe 28 (mündlich): Diracsche Deltafunktion (8 Punkte)

Die Diracsche Deltafunktion ist eine verallgemeinerte Funktion (Distribution), die durch ihre Wirkung im Integral definiert ist. Es gilt:

$$\int_a^b g(x)\delta(x)dx = \begin{cases} g(0) & \text{für } a<0<b \\ -g(0) & \text{für } b<0<a \\ 0 & \text{für } a\cdot b>0 \end{cases} \qquad (1)$$

a) Die Deltafunktion kann als Grenzwert einer Folge von gewöhnlichen Funktionen dargestellt werden. Zeigen Sie, dass die Grenzwerte $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ für folgende Funktionen

(i) $f_k(x) = \begin{cases} k & \text{für} \quad -\frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (ii) $f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2}$

(iii) $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{\pi x}$ (iv) $f_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k} e^{itx}dt$

die Eigenschaften der δ-Funktion erfüllen.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale

(i) $\int_{-1}^{4} (x^3+2x-2)\,\delta\,(x-2)\,dx$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+3)\,\delta\,(-4x)\,dx$

(iii) $\int_{-2}^{4} (x^3+5x)\,\delta\,(x^2-a)\,dx$

Verwenden Sie geeignete Substitutionen, um die Integrale in die Form (1) zu bringen.

Aufgabe 29 (schriftlich): Wasserstoffatommodell (16 Punkte)

Das neutrale Wasserstoffatom im Grundzustand kann als positive Punktladung (Proton, Ladung $q=+e$) angesehen werden, die von einer negativen Ladungswolke der Ladungsdichte

$$\rho_e(\vec{r}) = C\exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$$

umgeben ist. Hierbei ist $a_0 = 0.529\text{Å}$ der Bohrsche Radius.

a) Berechnen Sie die Normierungskonstante C aus der Neutralitätsbedingung.

b) Welcher Anteil der mittleren Elektonenladung befindet sich innerhalb einer Kugel vom Radius a_0 um das Proton?

c) Wegen der Kugelsymmetrie von $\rho_e(\vec{r})$ konnten Sie unter a) und b) die Winkelintegrale einfach lösen. Der verbleibende Integrand zur Berechnung der Ladung innerhalb einer Kugel vom Radius r heißt radiale Elektronendichteverteilung. Skizzieren Sie diese radiale Ladungsdichte des Elektrons im Grundzustand des H-Atoms und bestimmen Sie das Maximum der Kurve.

d) Berechnen Sie das skalare Potential $\phi(\vec{r})$ zur Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \rho_e(\vec{r}) + \rho_k(\vec{r})$ mit $\rho_k(\vec{r}) = e\delta(\vec{r})$.

e) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$

f) Diskutieren Sie Potential und Feldstärke in den Grenzfällen $r \ll a_0$ und $r \gg a_0$.