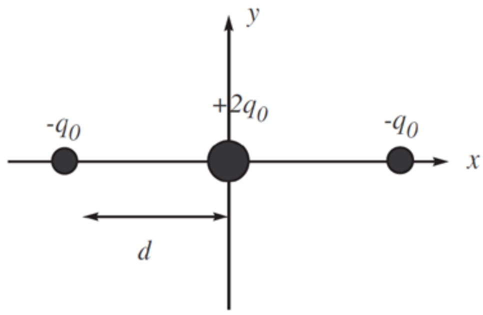
Aufgabe 30 (mündlich): Linearer Multipol (5 Punkte)

Gegeben seien eine symmetrische lineare Anordnung von Punktladungen in der *xy*-Ebene (s. Skizze).



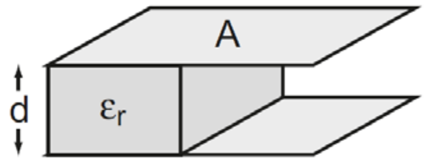
a) Berechnen Sie die niedrigsten Multipolmomente der Ladungsverteilung bis zum Quadrupolmoment.

b) Berechnen Sie aus den Multipolmomenten das elektrische Potential $\phi(\vec{r})$ und formulieren Sie $\phi(r,\vartheta,\varphi)$ in Kugelkoordinaten.

c) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}$.

Aufgabe 31 (mündlich): Kondensator mit Dielektrikum (5 Punkte)

Ein Plattenkondensator mit der Fläche A und dem Plattenabstand d werde auf die Spannung U aufgeladen und dann von der Spannungsquelle getrennt. Eine Platte mit Dielektrizitätszahl $\varepsilon_r = 2$, der Dicke d und Grundfläche $A/2$ werde jetzt in den Kondensator eingeschoben. Es sei σ_1 die freie Ladungsdichte auf der Grenzfläche Leiter-Dielektrikum und σ_2 die freie Ladungsdichte auf der Grenzfläche Leiter-Luft.



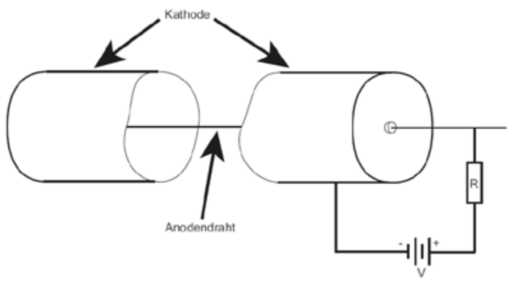
a) Weshalb muss das elektrische Feld im Dielektrikum und im freien Plattenzwischenraum den gleichen Wert haben?

b) Zeigen Sie, dass $\sigma_1 = 2\sigma_2$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die neue Kapazität den Wert $\varepsilon_0 3A/2d$ und die neue Spannung den Wert $2/3U$ hat.

Aufgabe 32 (schriftlich): Geiger-Müller-Zählrohr (8 Punkte)

Ein Geiger-Müller-Zählrohr besteht aus einer zylinderförmigen, leitenden Außenhülle (Länge l, Radius b, $l \gg b$) und einem dünnen Draht mit dem Radius a. Betrachten Sie das Zählrohr als Zylinderkondensator, in dem die Ladung Q gespeichert ist.



a) Bestimmen Sie das elektrische Feld $E(r)$ im Zählrohr, wobei r der Abstand zum Drahtmittelpunkt ist. Hinweis: Gaußscher Satz.

b) Bestimmen Sie das Potenzial $\phi(r)$ und die Spannung $U = \phi(b) - \phi(a)$.

c) Wie groß ist die Kapazität C des Zählrohrs?

d) Bei Durchgang eines geladenen Teilchens werden Zählgasatome ionisiert und die freigesetzten Elektronen driften in Richtung des Drahtes. Gewinnt ein Elektron zwischen zwei Stößen mit den Gasatomen so viel Energie, dass es weitere Gasatome ionisieren kann, findet eine lawinenartige Elektronenvervielfachung statt. Dies ist typischerweise ab Feldstärken von $E = 106\,\mathrm{V/m}$ der Fall. Bei welchem Abstand r setzt die Lawinenbildung bei $U = 2\,\mathrm{kV}$, $a = 10\,\mu\mathrm{m}, b = 1$ cm ein? (Nehmen Sie $\varepsilon_r \approx 1$ für das Zählgas an.)

Aufgabe 33 (schriftlich): Gaußscher und Stokesscher Satz (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das orientierte Flächenelement $d\vec{f} = \vec{n}\,df$

(i) für die Oberfläche einer Kugel mit Radius R um den Ursprung in Kugelkoordinaten (r,ϑ,φ) ;

(ii) für die Oberfläche eines Zylinders mit Radius R und Höhe H, dessen Symmetrieachse mit der z-Achse übereinstimmt, in Zylinderkoordinaten (r, φ, z). Betrachten Sie hier getrennt den Zylindermantel und die Zylinderdeckflächen.

Der Normalenvektor soll in allen Fällen aus dem Körper herauszeigen.

b) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}$

(i) durch die Oberfläche des Würfels $0 \le x \le L, \quad 0 \le y \le L, \quad 0 \le z \le L$;

(ii) durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius R um den Ursprung;

(iii) durch die Oberfläche eines Zylinders mit $0 \le r \le R, \quad 0 \le z \le H$.

c) Berechnen Sie den Fluss für die drei Fälle in Teilaufgabe b) mit Hilfe des Gaußschen Satzes.

d) Berechnen Sie für das Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r}) = (-y, x, 0)$ das Linienintegral $\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$.

Wählen Sie für die Kurve C

(i) den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$; (ii) den Rand des Quadrats $-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$.

e) Berechnen Sie für die von den beiden Kurven in Teil d) umschlossenen Flächen jeweils das Integral $\int \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{f}$.

!Bitte die TE Aufgaben separat abgeben!

Aufgabe TE12(mündlich): Poisson-Klammer (6 Punkte)

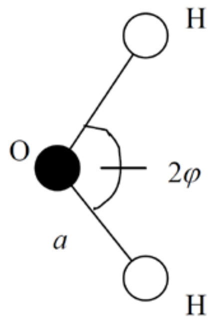
a) Es seien $f(q_i, p_i, t)$, $g(q_i, p_i, t)$ und $h(q_i, p_i, t)$ beliebige Funktionen der Koordinaten und Impulse sowie der Zeit. Zeigen Sie die folgenden Beziehungen:

(i) $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$ (ii) $\{f, q_k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k}$ (iii) $\{f, p_k\} = \frac{\partial f}{\partial q_k}$

b) Es seien $\vec{r}, \vec{p}, \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Ort, Impuls und Drehimpuls eines Teilchens. Berechnen Sie die folgenden Poisson-Klammern zwischen den kartesischen Komponenten

$$\{L_i, x_j\} \quad , \quad \{L_i, p_j\} \quad , \quad \{L_i, L_j\}$$

mit $i, j = x, y, z$. Tipp: $L_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} x_j p_k$



Aufgabe TE13 (schriftlich): Das Wassermolekül (10 Punkte)

Das H_2O-Molekül soll durch ein Modell mit drei Punktmassen beschrieben werden. Die Masse des O-Atoms sei m_O, die Masse der H-Atome m_H, der Winkel in der Gleichgewichtslage $2\varphi_0$ und der Abstand zwischen O und H sei a. Die potentielle Energie sei $V = \frac{1}{2} D (\varphi - \varphi_0)^2$.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion L des Systems auf. Beschränken Sie sich dabei auf die reine Biegeschwingung, d. h. a soll konstant bleiben und der Impuls und der Drehimpuls des Moleküls sollen verschwinden.

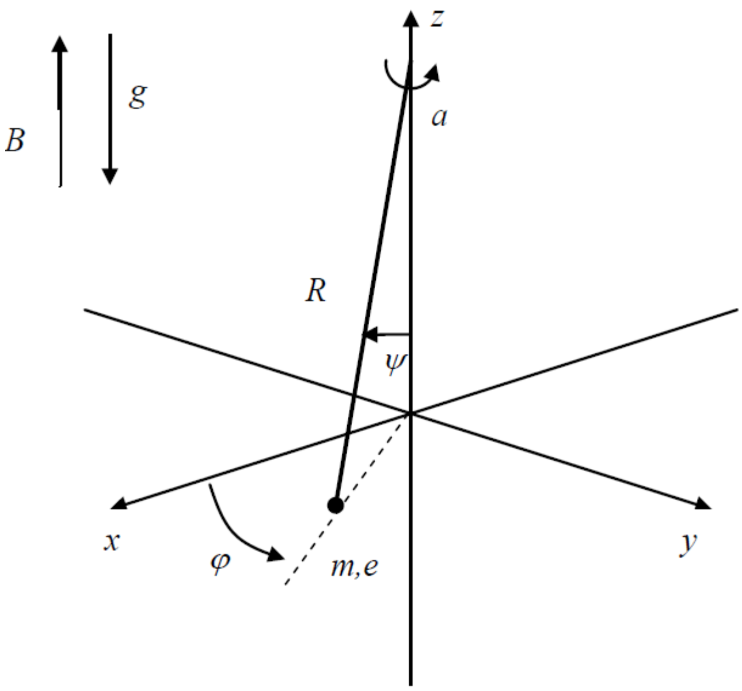
b) Nun sollen lediglich kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage betrachtet werden. Setzen Sie dazu $\varphi = \varphi_0 + q$ mit $q \ll 1$. Entwickeln Sie dann die Lagrange-Funktion bis zur zweiten Ordnung in q und $\dot{q}$. Berechnen Sie den zu q kanonischen konjugierten Impuls p.

c) Leiten Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus b) die Hamiltonfunktion H her. Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen? Zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion H eine Konstante der Bewegung ist.

d) Lösen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $q(0) = q_0$, $p(0) = p_0$.

Aufgabe TE-BONUS (schriftlich): Bewegung im Magnetfeld (20 Punkte)

Ein Pendel bestehe aus einem masselosen starren Stab der Länge *R*, an dessen Ende ein Massenpunkt *m* befestigt ist, der die Ladung *e* trägt. Der Stab dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = a$ um die *z*-Achse. Das Pendel befindet sich in einem homogenen Schwerefeld $\vec{g} = (0,0,-g)$ und einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0,0,B)$, $B \geq 0, a \geq 0, e > 0$.



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Klassifizieren Sie die auftretenden Zwangsbedingungen.

b) Zeigen Sie dass das Vektorpotential der Form $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y,x,0)$ auf das oben angegebene Magnetfeld führt (Tipp: $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$)

c) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Systems?

d) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für ψ her. Diskutieren Sie den Fall $a = 0$.

e) Eine einfache Lösung der Bewegungsgleichung ist durch $\psi = \psi_0 = \text{const.}$ gegeben. Welchen Wert hat ψ_0? Existiert eine solche Lösung für alle Werte von B und a? Wenn nicht, geben Sie eine Bedingung für B an, unter der bei einer vorgegebenen Winkelgeschwindigkeit a eine Lösung existiert.

f) Um kleine Abweichungen $\alpha = \psi - \psi_0$ von der Lösung $\psi = \psi_0$ zu untersuchen, soll die Bewegungsgleichung linearisiert werden. Leiten Sie die lineare Bewegungsgleichung für $\alpha(t)$ ab und lösen Sie diese.

g) Geben Sie eine Bedingung dafür an, dass der Massenpunkt eine geschlossene Bahn ausführt. Wie muss *B* gewählt werden, damit bei vorgegebenem *a* diese Bedingung erfüllt ist?
Diskutieren Sie die beiden Fälle, in denen die Bahnkurve zum ersten Mal (i) nach einer halben Umdrehung $\varphi = \pi$ und (ii) nach 2 Umdrehungen $\varphi = 4\pi$ denselben Wert ψ annimmt. Lassen sich die beiden Bahnen auch bei verschwindendem Magnetfeld $B = 0$ realisieren?