Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Klausur zur Statistischen Physik – SS 2013

Prof. Dr. M. Rohlfing

Die folgenden Angaben bitte deutlich in Blockschrift ausfüllen:

Name, Vorname: ______________________________

geb. am: ______________________________

in: ______________________________

Matrikel-Nr.: ______________________________

Übungsgruppenleiter: ______________________________

Aufgabe	**maximale Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	10	
2	9	
3	10	
4	6	
5	13	
6	6	
Summe	**54**	

Aufgabe 1: Grundlegendes (10 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen sehr kurz, d. h. mit ein oder zwei Sätzen oder mit einigen Stichwörtern oder einer kurzen Skizze!

1) Formulieren und erläutern Sie (kurz und knapp!) den ersten Hauptsatz der Thermodynamik.
2) Skizzieren Sie die Maxwell-Verteilung des idealen Gases für eine der drei Geschwindigkeits-Komponenten (v_x, v_y oder v_z) und deuten Sie an, wie sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Temperatur ändert.
3) Die herkömmliche Thermodynamik eines gewöhnlichen Gases aus zweiatomigen Molekülen (z. B. N_2 bei Raumtemperatur) wird durch fünf „Freiheitsgrade“ bestimmt. Welche sind das?
4) Ein zweiatomiges Molekül sollte eigentlich noch einen sechsten Freiheitsgrad aufweisen. Warum spielt er häufig (z. B. bei N_2 bei Raumtemperatur) keine wesentliche Rolle?
5) Erläutern Sie den Unterschied zwischen der „kanonischen Gesamtheit“ (oder „Ensemble“) und der „großkanonischen Gesamtheit“. Welche thermodynamischen Größen werden jeweils vorgegeben?
6) Skizzieren Sie die mittlere Besetzungszahl der Einteilchen-Zustände bei Fermionen als Funktion der Energie, und zwar bei niedriger und bei hoher Temperatur.
7) Erläutern Sie den Begriff der „Bose-Einstein-Kondensation“. Nennen Sie ein Beispiel.
8) Kann etwas Ähnliches wie die Bose-Einstein-Kondensation auch bei Fermionen vorkommen? Warum/warum nicht?
9) Skizzieren Sie die Energieverteilung der Schwarzkörperstrahlung (Photonengas) bei zwei verschiedenen Temperaturen („niedrige Temperatur/hohe Temperatur“).
10) Skizzieren Sie die Wärmekapazität eines Festkörpers aus N Atomen, wobei Sie nur die Schwingungen der Atome berücksichtigen, als Funktion der Temperatur. Wie verhält sich die Wärmekapazität für $T \to 0$?

Aufgabe 2: **Barometrische Höhenformel** **(9 Punkte)**

Betrachten Sie ein ideales Gas aus Teilchen der Masse m (der Einfachheit halber einatomig) im Schwerefeld der Erde; das Schwerefeld sei homogen (mit Gravitationskonstante g). Bei $z_0 = 0$ befinde sich der Erdboden. Als „Referenzfläche“ bzgl. der Koordinaten x und y möge eine Grundfläche A dienen; man betrachte die Gassäule über dieser Fläche.

a) Stellen Sie die Hamilton-Funktion für ein einzelnes Teilchen auf. [1 P]

b) Bestimmen Sie (unter der Annahme, die Temperatur T sei bekannt und überall gleich) die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(\vec{r}, \vec{p})$ des Teilchens. [3 P]

c) Leiten Sie aus ihren Ergebnissen die Wahrscheinlichkeits-Verteilung eines einzelnen Teilchens $\tilde{\rho}\,(z)$ bzgl. der Höhe z ab ($\tilde{\rho}\,(z) \sim \exp\left(-m\,g\,z/k_B\,T\right)$: barometrische Höhenformel). [2 P]

d) Betrachten Sie nun eine Gasportion (z. B. einen gasgefüllten Ballon, wobei die Ballonhülle keine Masse habe und auch für die Druck-Betrachtungen irrelevant sein möge). Die Gasportion möge um ein kleines $\delta\,z$ nach oben bewegt werden; dabei soll sie sich adiabatisch ausdehnen. Bleibt ihre Temperatur dabei konstant (losgelöst von obiger Annahme einer überall gleichen Temperatur)? Falls nicht: um wieviel ändert sie sich? [3 P]

Aufgabe 3: Klassische und quantenmechanische Statistik des Drehimpulses (10 Punkte)

Betrachten Sie ein System, das nur einen einzigen Freiheitsgrad, nämlich einen Rotationsfreiheitsgrad ϕ mit zugehörigem Trägheitsmoment J aufweist (z. B. ein scheibchenartiges Molekül mit nur einer relevanten Drehachse). [Hinweis: ein rotierendes System hat eine Rotationsenergie von $\frac{1}{2}\,J\left(\frac{d\,\phi}{d\,t}\right)^2$ und einen Drehimpuls von $L = J\,\frac{d\,\phi}{d\,t}$. L ist der zu ϕ kanonisch konjugierte Impuls. Alle Phasenraumintegrationen sind als $\frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\,\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\,L$ auszuführen.]

a) Zeigen Sie, dass die klassische kanonische Zustandssumme durch

$$Z_{\mathrm{kl}}\,(T) \;=\; \sqrt{2\,\pi\,J\,k_B\,T}/\hbar$$

gegeben ist. [2 P]

b) Bestimmen Sie aus $Z_{\mathrm{kl}}(T)$ die freie Energie F, die Entropie S, die innere Energie U und die Wärmekapazität C (als Funktion der Temperatur). [2 P]

c) Betrachten Sie nun das gleiche System quantenmechanisch, wieder bei vorgegebener Temperatur. [Hinweis: der Drehimpuls-Operator bei nur einer Drehachse besitzt die Eigenwerte $l \cdot \hbar$ mit ganzzahligem $l \in \mathbb{Z}$.] Bestimmen Sie die quantenmechanische Zustandssumme $Z_{\mathrm{qm}}\,(T)$. Werten Sie das Ergebnis für hohe und für niedrige Temperaturen gesondert aus. Erläutern Sie, was in diesem Zusamenhang „hohe“ und „tiefe“ Temperatur bedeutet. Zeigen Sie, dass sich im Grenzfall *hoher* Temperatur das klassische Ergebnis für die Zustandssumme ergibt. Bestimmen Sie bei *tiefer* Temperatur das Verhalten der inneren Energie U und der Wärmekapazität C. Skizzieren Sie C über den gesamten Temperaturbereich. [4 P]

d) Erfüllen die klassischen bzw. die quantenmechanischen Ergebnisse den dritten Hauptsatz der Wärmelehre? [2 P]

Aufgabe 4: Maximalprinzip der Entropie (6 Punkte)

Betrachten Sie zwei Teilsysteme 1 und 2 (mit Energien E_1 und E_2). Nehmen Sie an, dass jedes Teilsystem mit sich selbst im Gleichgewicht sei, und dass ihre (bereits maximierten) Entropien durch Funktionen $S_1(E_1)$ bzw. $S_2(E_2)$ gegeben seien.

a) Drücken Sie $S_j(E_j)$ durch die Zahl der Mikrozustände aus, die Teilsystem j bei Energie E_j annehmen kann. [1 P]

b) Nun sei zwischen den beiden Teilsystemen Energie-Austausch möglich; ihre Gesamtenergie möge dabei konstant bleiben ($E_1 + E_2 = E =$ const., z. B. weil das Gesamtsystem nach außen hin abgeschlossen sei). Nehmen Sie an, die Gesamtentropie sei durch die Summe beider Teil-Entropien gegeben, und leiten Sie aus dem Maximalprinzip der Gesamtentropie die Bedingung für das thermodynamische Gleichgewicht zwischen den beiden Teilsystemen ab (nämlich, dass beide Teilsysteme die gleiche Temperatur haben müssen). [2 P]

c) Nunmehr sei Teilsystem 2 als Wärmebad wesentlich größer als Teilsystem 1. Zeigen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, dass (bei vorgegebener Temperatur) die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Mikrozustände i des Teilsystems 1 (mit zugehöriger Energie $E_{1,i}$) durch $\rho_i^{(1)} \sim \exp(-\beta\, E_{1,i})$ gegeben ist (Boltzmann-Faktor). [3 P]

Aufgabe 5: Fermionen (13 Punkte)

a) Zeigen Sie im Rahmen des großkanonischen Ensembles, dass bei einem fermionischen System aus wechselwirkungsfreien Teilchen die mittlere Besetzungszahl eines Einteilchen-Zustands $|j\rangle$ (mit Energie E_j) durch $\langle n_j\rangle = (\exp(\beta\,(E_j - \mu)) + 1)^{-1}$ gegeben ist. [5 P]

b) Bestimmen Sie mit dieser Fermi-Verteilung die innere Energie eines freien Elektronengases aus N Teilchen im Volumen V, und zwar für $T = 0$. [4 P]

c) Bestimmen Sie die gleiche innere Energie im Grenzfall sehr hoher Temperatur, wobei Sie guten Gewissens $\mu \ll -k_B T$ annehmen dürfen. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der inneren Energie eines *klassischen* idealen Gases. [4 P]

Aufgabe 6: Phasenübergang (6 Punkte)

Betrachten Sie ein System, das bei einer Temperatur T_C einen Phasenübergang aufweise und durch einen Ordnungsparameter ϕ gekennzeichnet sei, dessen Verhalten nahe T_C durch charakteristische kritische Exponenten gegeben sei. Zur Beschreibung diene folgender Ausdruck für die freie Enthalpie als Funktion von T und ϕ:

$$G\,(T,\,\phi) \;=\; a_0 \,\cdot\, (T \,-\, T_C) \,\cdot\, \phi^2 \,+\, b_0 \,\cdot\, \phi^4$$

mit Konstanten $a_0 \,>\, 0$ und $b_0 \,>\, 0$.

a) Skizzieren Sie $G\,(T,\,\phi)$ für $T \,=\, T_C$, $T \,<\, T_C$ und $T \,>\, T_C$. [1 P]

b) Durch Minimieren von $G(T, \phi)$ bzgl. ϕ bekommt man denjenigen Wert für ϕ, der sich bei gegebener Temperatur tatsächlich einstellt. Bestimmen Sie diese Werte für ϕ. Untersuchen Sie die Ergebnisse ggf. hinsichtlich thermodynamischer Stabilität ($\rightarrow$ wird G wirklich minimiert?). Skizzieren Sie die Ergebnisse für ϕ als Funktion der Temperatur und bestimmen Sie ggf., welcher kritische Exponent sich nahe T_C ergibt. [5 P]