Aufgabe 29: (Anti-)Ferromagnetismus (10 Punkte)

Ein (Anti-)Ferromagnet lässt sich näherungsweise durch das Ising-Modell beschreiben, d. h. durch eine Hamilton-Funktion der Form

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} J_{ij}\, s_i\, s_j + \mu_B\, B_0 \sum_{i=1}^{N} s_i$$

mit $s_i = \pm 1$ (Spin up/down). Hierbei sind J_{ij} die Austausch-Integrale zwischen den Spins ($J > 0$ $\leftrightarrow$ ferromagnetisch, $J < 0 \leftrightarrow$ antiferromagnetisch), und B_0 ist die Stärke eines von außen angelegten Magnetfeldes (die Richtung des Magnetfeldes wurde hier als Quantisierungsrichtung für den Spin verwendet). Es möge nur Nächste-Nachbar-Wechselwirkung herrschen, wobei alle Austausch-Integrale gleich seien: $J_{ij} = J$. Der Einfachheit halber konzentriere man sich auf regelmäßige Anordnungen (lineare Kette / quadratisches Raster / kubisches Gitter), bei denen jeder Spin $2\,D$ nächste Nachbarn hat ($D = 1/2/3$: Raumdimension). Betrachten Sie das System im kanonischen Ensemble.

a) Leiten Sie den Zusammenhang her, der sich im ferromagnetischen Fall im Rahmen der Molekularfeld-Näherung zwischen dem Spin-Erwartungswert $\langle s \rangle$, dem Austausch-Integral J und dem Magnetfeld B_0 ergibt. Sie können Ergebnisse aus Aufgabe 9 verwenden.

b) Die Bestimmungsgleichung aus a) muss selbstkonsistent gelöst werden. Ohne externes Magnetfeld ($B_0 = 0$) bekommt man unterhalb einer kritischen Temperatur T_C spontane Magnetisierung ($\langle s \rangle \neq 0$: ferromagnetische Phase), oberhalb T_C hingegen nicht ($\langle s \rangle = 0$: paramagnetische Phase). Zeigen Sie anhand der freien Energie, dass unterhalb T_C die Lösung $\langle s \rangle = 0$ thermodynamisch instabil ist. Bestimmen Sie T_C sowie den Spinerwartungswert und die Magnetisierung für sehr kleine Temperaturen ($T \ll T_C$) sowie knapp unterhalb der kritischen Temperatur ($T < T_C$ mit $|T - T_C| \ll T_C$). Welcher kritische Exponent ergibt sich für die Temperatur-Abhängigkeit der Magnetisierung knapp unterhalb T_C?

c) Erweitern Sie die Überlegungen aus b) um das Magnetfeld (d. h. jetzt $B_0 \neq 0$) und bestimmen Sie im Grenzfall $B_0 \to 0$ die magnetische Suszeptibilität knapp unterhalb und knapp oberhalb der kritischen Temperatur.

d) Nun betrachte man das gleiche System im antiferromagnetischen Fall, d. h. $J < 0$. Zeigen Sie (wiederum im Rahmen der Molekularfeld-Näherung), dass es auch hier eine Übergangstemperatur T_N (Néel-Temperatur) zwischen einer antiferromagnetischen und einer paramagnetischen Phase gibt. Bestimmen Sie T_N. Bestimmen Sie ferner die magnetische Suszeptibilität knapp oberhalb von T_N.

   Hinweis: Da nun benachbarte Spins antiparallel stehen möchten, ist es notwendig, bei der geordneten Phase alternierende Spins auf zwei Untergittern zu betrachten (mit *zwei* Spinerwartungswerten $\langle s \rangle_+$ und $\langle s \rangle_-$).