2. Übung zur Festkörpertheorie II (SS 2014) **Prof. Krüger**

Ausgabedatum: 29.04.2014 Abgabedatum: 06.05.2014

Aufgabe 3: Rechnen mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Bosonen (2 Punkte)

Die Eigenzustände $|w\rangle = |n_1(\vec{q}_1), n_2(\vec{q}_1), ...\rangle$ des Hamiltonoperators der Phononen

$$\hat{H} = \sum_{l=1}^{3N_B} \sum_{j=1}^{N_{\text{Zelle}}} \hbar\,\omega_l(\vec{q}_j) \left(\hat{a}_l^+(\vec{q}_j)\,\hat{a}_l(\vec{q}_j) + \frac{1}{2}\right)$$

lassen sich in der Form

$$|w\rangle = \prod_{l'=1}^{3N_B} \prod_{j'=1}^{N_{\text{Zelle}}} \frac{(\hat{a}_{l'}^+(\vec{q}_{j'}))^{n_{l'}(\vec{q}_{j'})}}{\sqrt{n_{l'}(\vec{q}_{j'})!}}\,|0\rangle$$

darstellen. Die Operatoren $\hat{a}_l(\vec{q}_j)$ und $\hat{a}_{l'}^+(\vec{q}_{j'})$ erfüllen die Vertauschungsrelation

$$\left[\hat{a}_l(\vec{q}_j),\, \hat{a}_{l'}^+(\vec{q}_{j'})\right] = \delta_{ll'}\,\delta_{jj'}\ .$$

$|0\rangle$ ist der Vakuumzustand mit $\langle 0|0\rangle = 1$.

a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\hat{a}_l(\vec{q}_j)\,(\hat{a}_l^+(\vec{q}_j))^3\,|0\rangle = \alpha\,(\hat{a}_l^+(\vec{q}_j))^2\,|0\rangle$$

ist. Geben Sie den Wert der Zahl α an.

b) Formen Sie den Ausdruck

$$\hat{a}_l(\vec{q}_j)\,(\hat{a}_{l'}^+(\vec{q}_{j'}))^{n_{l'}(\vec{q}_{j'})}$$

so um, dass alle Erzeugungsoperatoren links von dem Vernichtungsoperator stehen.

Aufgabe 4: Vertauschungsrelationen für Fermionen (3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{c}_j^+$ und $\hat{c}_j$ für Fermionen kennengelernt. Verwenden Sie Antikommutator-Relationen dieser Operatoren, um folgende Kommutatoren $[\hat{A}, \hat{B}]_- = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}$ zu berechnen.

a)

$$[\hat{n}_j, \hat{c}_k]_- \qquad \text{und} \qquad [\hat{n}_j, \hat{c}_k^+]_- \qquad \text{mit} \qquad \hat{n}_j = \hat{c}_j^+\,\hat{c}_j\ .$$

b)

$$[\hat{c}_j^+\,\hat{c}_j, \hat{c}_l^+\,\hat{c}_m]_- = \alpha\cdot\hat{c}_i^+\,\hat{c}_m + \beta\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_j\ .$$

Berechnen Sie α und β.

c)

$$\begin{aligned}[\hat{c}_i^+\,\hat{c}_j\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_m, \hat{c}_n^+\,\hat{c}_p]_- &= (\alpha\cdot\hat{c}_i^+\,\hat{c}_p + \beta\cdot\hat{c}_n^+\,\hat{c}_j)\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_m \\ &+ \hat{c}_i^+\,\hat{c}_j\,(\gamma\cdot\hat{c}_l^+\,\hat{c}_p + \zeta\cdot\hat{c}_n^+\,\hat{c}_m)\ .\end{aligned}$$

Berechnen Sie α, β, γ und ζ.

Aufgabe 5: Teilchendichteoperator (3 Punkte)

Der Operator der Teilchendichte hat in der Ortsdarstellung die Form

$$\hat{\rho}\,(\vec{r}\,) \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{N} \delta\,(\vec{r} \,-\, \vec{r}_i)\ .$$

a) Transformieren Sie diesen Operator in die Besetzungszahldarstellung $\hat{\rho}_F\,(\vec{r}\,)$ mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{c}^{+}_{\vec{k}}$ und $\vec{c}_{k'}$.

Verwenden Sie als Einteilchenbasis ebene Wellen der Form

$$\psi_{\vec{k}}\,(\vec{r}\,) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \cdot \mathrm{e}^{i\,\vec{k}\,\vec{r}}\ .$$

Dabei ist Ω das Normierungsvolumen.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $\hat{\rho}_F\,(\vec{r}\,)$

$$\tilde{\hat{\rho}}_F\,(\vec{q}\,) \;=\; \frac{1}{\Omega} \int\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-i\,\vec{q}\,\vec{r}}\, \hat{\rho}_F\,(\vec{r}\,)\, d^3\, r\ .$$

Aufgabe 6: Erwartungswerte für Fermionen (2 Punkte)

Die Eigenzustände des Hamiltonoperators

$$\hat{H} \;=\; \sum_{j\,=\,1}^{\infty} \varepsilon_j\, \hat{c}^{+}_j\, c_j$$

haben die Form

$$|\phi\rangle \;=\; \prod_{j\,=\,1}^{\infty} (\hat{c}^{+}_j)^{n_j}\, |0\rangle\ .$$

Bestimmen Sie die Erwartungswerte

a) $\langle\phi|\hat{c}^{+}_l\, \hat{c}_m|\phi\rangle$,

b) $\langle\phi|\hat{c}^{+}_i\, \hat{c}^{+}_l\, \hat{c}_k\, \hat{c}_m|\phi\rangle$.

Drücken Sie Ihr Ergebnis durch die Besetzungszahlen n_k und n_m aus.