Aufgabe 10: Dielektrische Funktion des Elektronengases (4 Punkte)

Die dielektrische Funktion des dreidimensionalen Elektronengases hat im Rahmen der RPA Näherung für $T = 0$ die Form

$$\varepsilon(\vec{q}, \omega) = 1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0 \Omega} \frac{2}{q^2} \sum_{\substack{\vec{k} \\ |\vec{k}| \leq k_F}} \left(\frac{1}{E(\vec{k}) - E(\vec{k} + \vec{q}) + \hbar\omega} + \frac{1}{E(\vec{k}) - E(\vec{k} + \vec{q}) - \hbar\omega} \right) .$$

Wir betrachten hier den statischen Grenzfall $\omega = 0$.

a) Berechnen Sie $\varepsilon(\vec{q}, 0)$. Ersetzen Sie dazu die Summe über $\vec{k}$ durch ein Integral.

b) Untersuchen Sie den Grenzfall $q \ll 2k_F$. Berücksichtigen Sie dabei die Terme einschließlich der Ordnung $\frac{1}{q^2}$. Berechnen Sie in diesem Grenzfall das abgeschirmte Potential

$$\tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{q}) = \frac{\tilde{V}_{\text{el}}(\vec{q})}{\varepsilon(\vec{q})} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{V}_{\text{el}}(\vec{q}) = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 \Omega} \frac{1}{q^2} .$$

Bestimmen Sie aus $\tilde{V}_{\text{eff}}(\vec{q})$ das abgeschirmte Potential $V_{\text{eff}}(\vec{r})$ im Ortsraum.

c) Wie verhält sich $\varepsilon(\vec{q}, 0)$ für $q \to \infty$?

d) Skizzieren Sie $\varepsilon(\vec{q}, 0)$.

Hinweis:

$$\int x \ln \left| \frac{ax + b}{ax - b} \right| = \frac{b}{a} x + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln \left| \frac{ax + b}{ax - b} \right| .$$

Aufgabe 11: Grenzfall $\vec{q} \to 0$ (3 Punkte)

Bei der Berechnung der longitudinalen dielektrischen Funktion eines periodischen Festkörpers treten Matrixelemente der Form

$$I(\vec{q}) = \int \psi^*_{n', \vec{k} + \vec{q}}(\vec{r})\, e^{i\vec{q}r}\, \psi_{n, \vec{k}}(\vec{r})\, d^3 r$$

auf. Diese beschreiben Übergänge zwischen den Bändern n' und n. In dieser Aufgabe soll der Fall kleiner Wellenvektoren $\vec{q}$ betrachtet werden.

Die Blochfunktionen haben die Form

$$\psi_{n, \vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{n, k}(\vec{r}) \qquad \text{und} \qquad \psi_{n', \vec{k} + \vec{q}}(\vec{r}) = e^{i(\vec{k} + \vec{q})r} u_{n', k + q}(\vec{r}) .$$

a) Stellen Sie $I(\vec{q})$ durch die gitterperiodischen Funktionen $u_{n, \vec{k}}$ und $u_{n', k+q}$ dar.

b) Die gitterperiodischen Funktionen erfüllen folgende Schrödingergleichungen

$$\hat{H}(\vec{k})\, u_{n, \vec{k}}(\vec{r}) = E_{n, \vec{k}}\, u_{n, \vec{k}}(\vec{r})$$

$$\hat{H}(\vec{k} + \vec{q})\, u_{n', k + \vec{q}}(r) = E_{n', \vec{k} + \vec{q}}\, u_{n', \vec{k} + q}(\vec{r})$$

Geben Sie $\hat{H}(\vec{k})$ und $\hat{H}(\vec{k} + \vec{q})$ an.

c) Für kleine $\vec{q}$ ist $\hat{U} := \hat{H}(\vec{k}+\vec{q}) - \hat{H}(\vec{k})$ eine kleine Störung. Verwenden Sie die erste Ordnung der Störungstheorie, um $u_{n',\vec{k}+\vec{q}}(\vec{r})$ durch $u_{n,\vec{k}}(\vec{r})$ darzustellen. Benutzen Sie dieses Ergebnis, um $I(\vec{q})$ zu berechnen. Nutzen Sie dabei die Orthonormalität der Funktionen aus.

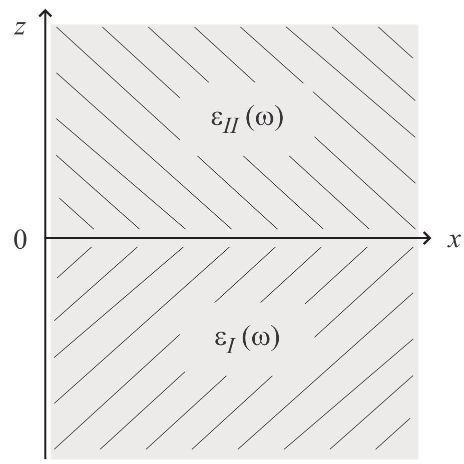
Hinweis: Stellen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des Impulsmatrixelementes

$$\vec{p}_{n',n}(\vec{k}) = \int u^*_{n',\vec{k}}(\vec{r})\,\hat{\vec{p}}\,u_{n,\vec{k}}(\vec{r})\,d^3r$$

dar.

Aufgabe 12: Oberflächen-Plasmon-Polariton (3 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen elektromagnetische Felder untersucht werden, die sich parallel zu einer Grenzfläche zwischen zwei Medien (z. B. Kristall-Vakuum) ausbreiten und dabei an der Grenzfläche lokalisiert sind. Das Medium I mit der dielektrischen Funktion $\varepsilon_I(\omega)$ befinde sich im Halbraum $z<0$, das Medium II mit $\varepsilon_{II}(\omega)$ sei im Halbraum $z>0$.



Untersuchen Sie dazu das Verhalten einer Welle

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{cases} \vec{E}_I \quad e^{ikx}\,e^{+\alpha_I z}\,e^{-i\omega t} & \text{für} \quad z \le 0 \\ \vec{E}_{II} \quad e^{ikx}\,e^{-\alpha_{II} z}\,e^{-i\omega t} & \text{für} \quad z \ge 0 \end{cases}$$

mit

$$\vec{E}_I = E_1\left(ik,\,0,\,\frac{k^2}{\alpha_I}\right) \qquad \text{und} \qquad \vec{E}_{II} = E_2\left(ik,\,0,\,-\frac{k^2}{\alpha_{II}}\right).$$

Dabei hänge α_I und α_{II} von k und ω, aber nicht von $\vec{r}$ ab.

a) Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t)$.

b) Verwenden Sie die Wellengleichung $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \mu_0\cdot\ddot{\vec{D}} = 0$ und die Stetigkeitsbedingungen für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{D} = \varepsilon_0\,\varepsilon(\omega)\,\vec{E}$, um eine Bedingungsgleichung mit ε_I, ε_{II}, α_I und α_{II} zu erhalten, aus der die möglichen Schwingungsfrequenzen berechnet werden können.

c) Betrachten Sie den Fall

$$\varepsilon_I(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_{II}(\omega) = 1\,.$$

Dabei ist ω_p die Plasmonfrequenz. Berechnen Sie die Frequenz $\omega(k)$ der Wellen, die an der Grenzfläche lokalisiert sind. Skizzieren Sie $\omega(k)$.

d) Lassen sich die in c) berechneten Oberflächen-Plasmon-Polaritonen durch Licht anregen?