10. Übung zur Physik II (SS 2014) **Prof. Kohl/Prof. Rohlfing**

Ausgabedatum: 17.06.2014 Abgabedatum: 24.06.2014

10:30 Uhr, Briefkasten neben IG 1-85

Aufgabe 41: Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten (mündlich, 6 Punkte)

(Wir bezeichnen in dieser Aufgabe das Potential mit $\phi(\vec{r})$, um eine Verwechslung mit dem Winkel φ in Kugelkoordinaten auszuschließen.)

a) Das Potential $\phi(\vec{r})$ einer Ladungsverteilung habe in Kugelkoordinaten die Form

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} R^2 \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3} \qquad \text{mit} \qquad R = \text{const}\,.$$

Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen allgemeinen Formeln den Ausdruck $\Delta f(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten.

c) Eine metallische Kugel mit Radius R wird in ein homogenes elektrisches Feld $E_0\,\vec{e}_z$ gebracht. Dieses Feld influenziert auf der Kugeloberfläche eine Ladungsdichte. Das resultierende Potential lautet (in Kugelkoordinaten) außerhalb der Kugel:

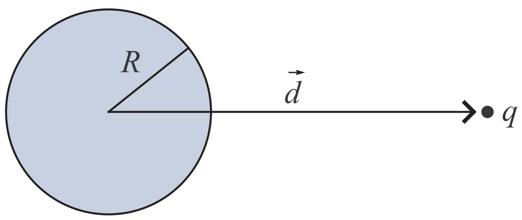
$$\phi(r, \vartheta) = -E_0\, r\cos\vartheta + E_0 \frac{R^3}{r^2}\cos\vartheta\,.$$

i) Berechnen Sie $\Delta\phi(r, \vartheta)$ außerhalb der Kugel.

ii) Bestimmen Sie die induzierte Flächenladungsdichte $\sigma(\vartheta)$ an der Oberfläche der Kugel.

Aufgabe 42: Bildladungsmethode (schriftlich, 8 Punkte)

Eine Punktladung q befinde sich im Abstand d vom Mittelpunkt einer leitenden Kugel mit Radius R. Der Mittelpunkt der Kugel falle mit dem Koordinatenursprung zusammen.



Berechnen Sie das Potential dieser Anordnung für den Fall einer geerdeten Kugel, d. h. $\varphi(\vec{r}) = 0$ für $|\vec{r}| = R$. Welche Ladungsdichte wird an der Oberfläche der Kugel influenziert? Geben Sie die Kraft an, die durch die auf der Kugeloberfläche influenzierte Ladung auf die Punktladung q ausgeübt wird.

Aufgabe 43: **Bestimmung eines zylindersymmetrischen Potentials** **(mündlich, 6 Punkte)**

Zur Fokussierung von Elektronen- und Ionenstrahlen werden elektrische Felder benutzt, die durch konzentrisch um eine Achse (z. B. z-Achse) angeordnete ringförmige Elektroden erzeugt werden. Das Gesamtpotential einer solchen Anordnung kann man schreiben als

$$\varphi(r,\, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)\, r^n \,.$$

Dabei ist r der zweidimensionale Abstand von der z-Achse.

Zeigen Sie, dass das Potential im raumladungsfreien Raum bei diesen Systemen eindeutig durch das Potential auf der z-Achse $\varphi(r = 0,\, z) = a_0(z)$ bestimmt ist und sich in der Form

$$\varphi(r,\, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m\,(m!)^2} \cdot \frac{d^{2m}}{d\,z^{2m}}\, a_0(z) \cdot r^{2m}$$

darstellen lässt.

Setzen Sie dazu $\varphi(r,\, z)$ in die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten ein und betrachten Sie die Vorfaktoren zu gleichen Potenzen von r.