4. Übung Theoretische Ergänzungen zur Physik II (SS 2014) **Prof. Rohlfing**

Abgabedatum: Di, 03.06.2014, Besprechung: 16./17.06.2014

10:30 Uhr, Briefkasten neben IG 1-85

Aufgabe 8: Harmonischer Oszillator (schriftlich, 4 Punkte)

Betrachten Sie einen Massenpunkt der Masse m in einem parabolischen Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 .$$

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.

b) Bestimmen Sie den zu x kanonisch konjugierten Impuls p.

c) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion $H(x, p)$.

d) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf und lösen Sie sie für die Anfangsbedingungen

$$x(t = 0) = x_0 , \qquad p(t = 0) = 0 .$$

e) Skizzieren Sie die Trajektorie $(x(t), p(t))$ im Phasenraum, d. h. in der (x, p)-Ebene. Zeigen Sie, dass die Bahnkurve im Phasenraum eine Ellipse bildet.

f) Zeigen Sie explizit, dass H bzgl. der Zeit konstant ist. Welche physikalische Bedeutung hat H?

Aufgabe 9: Frühsommer (mündlich, 10 Punkte)

Betrachten Sie eine leere, aufrecht gehaltene Eiswaffel (mit Öffnungswinkel 2θ), auf deren Innenfläche sich ein Speiseeis-Teilchen der Masse m reibungsfrei bewegen kann.

a) Beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens mittels zweier generalisierter Koordinaten: r = Abstand von der Tütenspitze, φ = Drehwinkel um die Senkrechte.

b) Stellen Sie (unter Einfluss der Gravitation) die Lagrange-Funktion auf und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten ab.

c) Bestimmen Sie zu den generalisierten Koordinaten die zugehörigen kanonischen Impulse.

d) Stellen Sie nunmehr die zugehörige Hamilton-Funktion auf und bestimmen Sie daraus die kanonischen Bewegungsgleichungen für die Koordinaten und die Impulse.

e) Welche physikalische Bedeutung hat der kanonische Impuls p_φ zu dem in a) als Koordinate gewählten Drehwinkel?

Zeigen Sie, dass dieser kanonische Impuls zeitlich erhalten bleibt.

Wie viele und welche der in d) bestimmten Bewegungsgleichungen müssen dann eigentlich noch wirklich gelöst werden, um (mittels geeigneter Anfangsbedingungen) die Trajektorie des Systems zu bestimmen?

f) Lösen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen für zwei spezielle Anfangssituationen:

i) Zur Zeit $t = 0$ seien

$$r = r_0 \,, \qquad \varphi = 0 \,, \qquad p_r = 0 \qquad \text{und} \qquad p_\varphi = 0 \,.$$

ii) Zur Zeit $t = 0$ seien

$$r = r_0 \,, \quad \varphi = 0 \,, \quad p_r = 0 \quad \text{und} \quad p_\varphi = \sqrt{m^2\, g\, r_0^3 \cos\theta \sin^2\theta} \,.$$

Skizzieren Sie jeweils die Trajektorie des Teilchens in der Eistüte.

Aufgabe 10: Teilchen im Magnetfeld **(schriftlich, 6 Punkte)**

a) Welches elektromagnetische Feld wird durch die Potentiale

$$\varphi\,(r,\, t) = 0 \,, \qquad \vec{A}\,(\vec{r},\, t) = \frac{1}{2}\, B_0\,(-y,\, x,\, 0)$$

beschrieben?

b) Bestimmen Sie für ein Elektron in diesem Feld die Lagrange-Funktion, die resultierenden Bewegungsgleichungen, die kanonischen Impulse und die Hamilton-Funktion.

c) Stellen Sie mittels der Hamilton-Funktion die kanonischen Bewegungsgleichungen auf und untersuchen Sie damit die zeitliche Änderung der kinetischen Energie.