6. Übung Theoretische Ergänzungen zur Physik II (SS 2014) **Prof. Rohlfing**
Abgabedatum: Di, 08.07.2014, Besprechung: 14./15.07.2014
10:30 Uhr, Briefkasten neben IG 1-85

Aufgabe 14: Kaninchen und Füchse **(mündlich, 6 Punkte)**

Eine Population von $x(t)$ Kaninchen entwickle sich im Laufe der Zeit gemäß

$$\dot{x} = a\,x - b\,x\,y\,,$$

wobei a die Reproduktionsrate, y die Anzahl von Füchsen, b die Fressrate der Füchse pro Kaninchen ist und $x(t) \in \mathbb{R}$ reellwertig betrachtet wird. Für die Anzahl der Füchse gelte

$$\dot{y} = -c\,y + d\,x\,y$$

mit der Sterberate c und der Reproduktionsrate d der Füchse pro Kaninchen.

a) Finden Sie die Fixpunkte des Systems.

b) Es sei $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ der nichttriviale Fixpunkt. Betrachten Sie die Dynamik in unmittelbarer Nähe dieses Punktes, indem Sie

$$x = x_0 + u\,, \qquad y = y_0 + v$$

setzen und die Gleichungen für u und v in der linearen Näherung betrachten. Zeigen Sie, dass

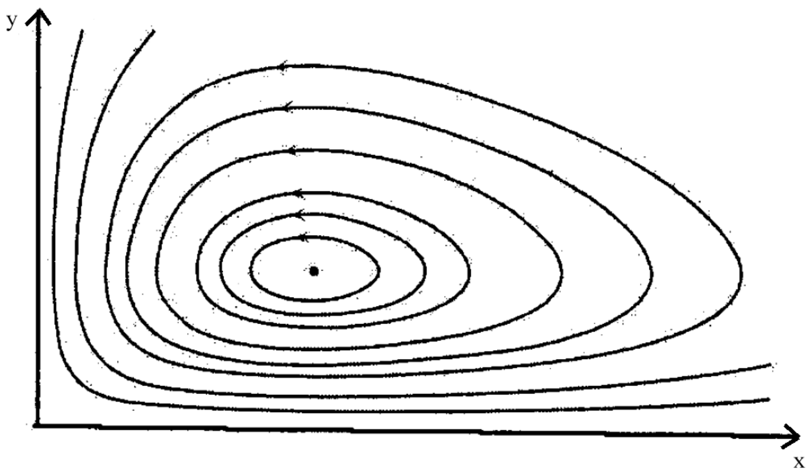
$$\ddot{u} + \omega^2\,u = 0$$

gilt, berechnen Sie ω und interpretieren Sie die Trajektorie.

c) Zeigen Sie, dass

$$V(x, y) = d\,x - c\,\ln x + b\,y - a\,\ln y$$

zeitlich konstant ist. Die Linien, auf denen V konstant ist, haben die folgende Gestalt:



Aufgabe 15: Poisson-Klammer **(schriftlich, 8 Punkte)**

a) Es seien
$$f\,(q_i,\,p_i,\,t)\;,\qquad g\,(q_i,\,p_i,\,t)\qquad\text{und}\qquad h\,(q_i,\,p_i,\,t)$$
beliebige Funktionen der Koordinaten und Impulse sowie der Zeit. Zeigen Sie die folgenden Beziehungen:
$$\text{i)}\quad \{f,\,g\,h\} = g\,\{f,\,h\} + \{f,\,g\}\,h\,,\qquad \text{ii)}\quad \{f,\,q_k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k}\,,\qquad \text{iii)}\quad \{f,\,p_k\} = \frac{\partial f}{\partial q_k}\;.$$

b) Es seien $\vec{r}$, $\vec{p}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Ort, Impuls und Drehimpuls eines Teilchens. Berechnen Sie exemplarisch die folgenden Poisson-Klammern zwischen den kartesischen Koordinaten:
$$\{L_x,\,x\}\;,\quad \{L_x,\,y\}\;,\quad \{L_x,\,p_x\}\;,\quad \{L_x,\,p_y\}\;,\quad \{L_x,\,L_y\}\;.$$

Aufgabe 16: Gekoppelte lineare Differentialgleichungen **(mündlich, 6 Punkte)**

Gegeben seien zwei physikalische Größen $x\,(t)$, $y\,(t)$, die den Bewegungsgleichungen
$$\dot{x} = a\,x + b\,y\;,\qquad \dot{y} = b\,x + a\,y$$
genügen mögen ($0 < a < b$).

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Exponential-Ansatzes, dass die zweidimensionale Trajektorie $\vec{r}\,(t)$ durch
$$\vec{r}\,(t) = c_+\,\vec{r}_+\,\mathrm{e}^{\lambda_+\,t} + c_-\,\vec{r}_-\,\mathrm{e}^{\lambda_-\,t}$$
beschrieben werden kann, und bestimmen Sie $\lambda_\pm$. Welche Vorzeichen haben $\lambda_\pm$?

b) Berechnen Sie $\vec{r}\,(t)$ für die Spezialfälle
$$\vec{r}\,(t = 0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad \vec{r}\,(t = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}\;.$$

c) Zeigen Sie, dass $(x,\,y) = (0,\,0)$ der einzige Fixpunkt des Systems ist.

d) Skizzieren Sie die möglichen Trajektorien in der x, y-Ebene.

e) Welche Anfangsbedingungen muss $\vec{r}\,(t = 0)$ erfüllen, damit $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{r}\,(t) = 0$ gilt? Welche Trajektorie ergibt sich?

f) Was geschieht, wenn die Trajektorie in e) durch eine kleine Störung modifiziert wird?