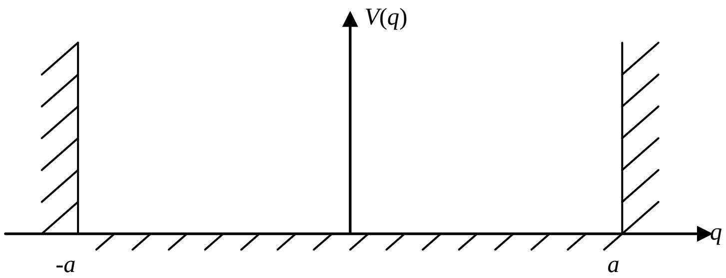
Aufgabe 7 (mündlich): Trajektorien im Phasenraum (4 Punkte)

Zeichnen Sie die Bahnkurve im Phasenraum für ein Teilchen,

a) das sich mit der Energie E in einem eindimensionalen, unendlich hohen Kastenpotential bewegt.



b) das unter der Schwerkraft aus der Höhe h herabfällt, am Boden inelastisch reflektiert wird und wieder bis zur Höhe 9/10 h aufsteigt, usw.

Aufgabe 8 (mündlich): Mikrokanonisches Ensemble aus harmonischen Oszillatoren (8 Punkte)

Gegeben sei ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Hamilton-Funktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 .$$

a) Berechnen Sie die Trajektorie $\left(q(t), p(t)\right)$ und zeigen Sie, dass dieses System ergodisch ist. Berechnen Sie die zeitlichen Mittelwerte $\overline{q}$ und $\overline{q^2}$ als Funktion der Energie E.

b) Bestimmen Sie die Phasenraumdichte $\rho(q,p)$ eines mikrokanonischen Ensembles aus harmonischen Oszillatoren mit der Energie E und der Energieunschärfe ΔE.
Berechnen Sie die Ensemble-Mittelwerte $\langle q \rangle$ und $\langle q^2 \rangle$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit den Zeitmittelwerten aus Teilaufgabe a).

Aufgabe 9 (schriftlich): Mikrokanonisches Ensemble aus zweidim. Oszillatoren (12 Punkte)

Ein Fadenpendel, das in zwei Richtungen schwingt, kann für kleine Auslenkungen als klassischer zweidimensionaler harmonischer Oszillator aufgefasst werden. Die zugehörige Hamiltonfunktion lautet:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(q_1^2 + q_2^2\right)$$

a) Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf und geben Sie die Lösungen für folgende Anfangsbedingungen an:

1. $q_1(0) = q_0 \quad p_1(0) = p_0 \quad q_2(0) = 0 \quad p_2(0) = 0$
2. $q_1(0) = q_0 \quad p_1(0) = 0 \quad q_2(0) = 0 \quad p_2(0) = p_0$

Wie groß ist die Gesamtenergie in den beiden Fällen? Berechnen Sie für beide Fälle die zeitlichen Mittelwerte $\overline{q_2}$ und $\overline{q_2^2}$.

b) Betrachten Sie nun ein mikrokanonisches Ensemble von 2-dimensionalen harmonischen Oszillatoren mit fester Energie E. Berechnen Sie das integrale Phasenraumvolumen $\varphi(E)$ und daraus die Zustandsdichte im Phasenraum $D(E)$. Benutzen Sie dazu die Formel für das Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit Radius R:

$$V_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n \,.$$

$\Gamma(x)$ sei hier die Γ-Funktion.

c) Die Wahrscheinlichkeitsdichte für ein klassisches mikrokanonisches Ensemble aus 2-dimensionalen Oszillatoren mit Energie E und verschwindender Energieunschärfe lautet:

$$\rho(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{D(E)}\,\delta\big(E - H(q_1, q_2, p_1, p_2)\big) \,.$$

Berechnen Sie damit die Scharmittelwerte $\langle q_2 \rangle$ und $\langle q_2^2 \rangle$.

d) Das Ergebnis für $\langle q_2^2 \rangle$ hängt von der Energie E ab. Drücken Sie für den allgemeinen Fall

$$q_1(t) = \hat{q}_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$$
$$q_2(t) = \hat{q}_2 \cos(\omega t - \varphi_2)$$

den Scharmittelwert $\langle q_2^2 \rangle$ durch die Amplituden $\hat{q}_2$ und $\hat{q}_1$ aus. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabenteil a). Was können Sie über die Ergodizität des Systems sagen?

e) Berechnen Sie für die allgemeine Lösung aus Aufgabenteil d) die Abhängigkeit der Größe $L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch und stellen Sie einen Zusammenhang zur Ergodizität des Systems her.

Hinweis: Einige nützliche Integrale:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\pi \qquad \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{3}{16}\pi$$