Aufgabe 10 (mündlich): Eigenschaften der Spur (5 Punkte)

Es seien *F*, *G*, *H* quantenmechanische Operatoren und α, β komplexe Zahlen. Beweisen Sie folgende nützliche Eigenschaften der Spur:

a) $\mathrm{Sp}\, F^\dagger = (\mathrm{Sp}\, F)^*$,

b) $\mathrm{Sp}(\alpha F + \beta G) = \alpha\, \mathrm{Sp}\, F + \beta\, \mathrm{Sp}\, G$,

c) $\mathrm{Sp}(F^\dagger F) \geq 0$,

d) $\mathrm{Sp}(F\,G\,H) = \mathrm{Sp}(H\,F\,G) = \mathrm{Sp}(G\,H\,F)$ (zyklische Invarianz der Spur),

e) $\mathrm{Sp}(U^\dagger F U) = \mathrm{Sp}\, F$, : falls U unitär ist.

Aufgabe 11 (mündlich): Freies Teilchen im Volumen V (10 Punkte)

Ein Teilchen mit der Masse m sei in dem Volumen V eingesperrt. Das Volumen kann durch einen 3-dimensionalen unendlich hohen Potentialtopf mit den Kantenlängen L beschrieben werden. Die Eigenenergien sind dann durch $E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ gegeben, wobei $n_i = 1, 2, 3, \ldots (i = x, y, z)$ die Quantenzahl in die entsprechende Richtung ist. Die Eigenzustände sind gegeben durch $|\, n_x, n_y, n_z\rangle$. In diesem System betrachten wir

a) ein statistisches Gemisch der Zustände $|\,2,1,1\rangle$, $|1,2,1\rangle$ und $|1,1,2\rangle$ mit jeweils $p = \frac{1}{3}$.

b) den reinen Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\,2,1,1\rangle + |1,2,1\rangle + |1,1,2\rangle\right)$.

c) ein statistisches Gemisch mit $p = \frac{1}{3}$ in $|\,2,1,1\rangle$ und mit $p = \frac{2}{3}$ in $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,2,1\rangle + |1,1,2\rangle)$.

d) ein statistisches Gemisch mit $p = \frac{1}{3}$ in $|\,2,1,1\rangle$, mit $p = \frac{1}{6}$ in $|1,2,1\rangle$ und mit $p = \frac{1}{2}$ in $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,2,1\rangle + |1,1,2\rangle)$.

Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit, mit der der jeweilige Zustand zum Gemisch beiträgt. Stellen Sie für alle Fälle die Dichtematrix ϱ auf. Berechnen Sie ϱ^2 und $\mathrm{Sp}(\varrho^2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis. Diagonalisieren Sie die Dichtematrix und berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren.

Aufgabe 12 (schriftlich): Spin-$\frac{1}{2}$-System im zeitabhängigen Magnetfeld (12 Punkte)

Ein Spin-$\frac{1}{2}$-System, das sich in einem statischen Magnetfeld $B_0 \vec{e}_z$ und in einem mit der Frequenz ω in der xy-Ebene rotierenden Magnetfeld $\vec{B}_1(t)$ befindet, wird in der Basis der Eigenfunktionen von S_z beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

mit $\hbar\omega_0 = g\mu_B B_0$ und $\hbar\omega_1 = g\mu_B B_1$. Dabei ist g der g-Faktor und μ_B das Bohrsche Magneton. Der statistische Operator ist in dieser Basis ebenfalls eine 2×2 – Matrix, die Dichtematrix

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

mit $\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle$ und $|1\rangle \equiv |\uparrow\rangle, |2\rangle \equiv |\downarrow\rangle$.

a) Welche Bedingungen folgen aus der Normierung und der Hermitizität von ρ für die Elemente ρ_{ij}?

b) Stellen Sie unter Verwendung der Liouville-von-Neumann-Gleichung die Bewegungsgleichungen für die Komponenten ρ_{ij} auf.

c) Wie lautet die allgemeine Lösung im Fall der exakten Resonanz, d. h. für $\omega = \omega_0$?

   Hinweis:
   Transformieren Sie die Bewegungsgleichungen zunächst in das mit B_1 mitrotierende Koordinatensystem durch den Ansatz $\rho_{12}(t) = \tilde{\rho}_{12}(t) e^{-i\omega_0 t}$
   und leiten Sie dann eine Bewegungsgleichung 2. Ordnung für die Inversion $\rho_{22} - \rho_{11}$ her. Verwenden Sie bei der Einführung von Integrationskonstanten die Ergebnisse aus Teilaufgabe a).

d) Betrachten Sie nun zwei spezielle Anfangszustände:

   (i) das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im reinen Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + i\;|\downarrow\rangle\right)$$

   (ii) das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im Zustand $|\uparrow\rangle$ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im Zustand $|\downarrow\rangle$.

   Geben Sie für beide Fälle die Dichtematrix $\rho(0)$ an. Berechnen Sie in beiden Fällen die Zeitentwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands $|\uparrow\rangle$, d. h. der Komponente $\rho_{11}(t)$.