Aufgabe 13 (mündlich): Mikrokanonisches Ensemble aus Spin-$\frac{1}{2}$-Systemen (12 Punkte)

Gegeben sei ein isoliertes System von N $(N >> 1)$ lokalisierten Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$, die sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ befinden. Die Spins können entweder in Richtung oder in Gegenrichtung des Feldes zeigen. Die Gesamtenergie des Systems beträgt dann $\mathrm{E} = (n_1 - n_2)\frac{1}{2} g \mu_B B_0$ wobei n_1 die Anzahl der parallelen und $n_2 = N - n_1$ die Anzahl der antiparallelen Spins bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Zustände $\Gamma(E)$ im Energieintervall zwischen E und $E + \Delta E$, wobei $\Delta E << E - E_{min}$ mit $E_{min} = -\frac{N}{2} g \mu_B B_0$ aber $\Delta E >> E_0 = g \mu_B B_0$ sein soll.

b) Geben Sie unter Verwendung der Stirling-Formel einen Näherungsausdruck für $\ln \Gamma(E)$ an.

c) Für große N hat die Funktion $\Gamma(E)$ ein scharfes Maximum. Leiten Sie einen Näherungsausdruck für $\Gamma(E)$ her, indem Sie $\ln \Gamma(E)$ bis zur zweiten Ordnung in eine Taylorreihe entwickeln.

Aufgabe 14 (schriftlich): Zusammengesetztes System aus klassischen HOs (12 Punkte)

a) Gegeben sei ein System aus N dreidimensionalen harmonischen Oszillatoren mit der Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right).$$

Berechnen Sie das totale Phasenraumvolumen $\varphi(E,N)$ und daraus die Zustandsdichte $D(E,N)$. Verwenden Sie dazu die in Aufgabe 9b) angegebene Formel für das Volumen einer n-dimensionalen Kugel.

b) Im Folgenden betrachten wir ein zusammengesetztes System aus zwei Teilsystemen mit N_1 bzw. N_2 harmonischen Oszillatoren, die sich im thermischen Kontakt befinden. Bestimmen Sie die Zustandsdichte $D(E,N)$ des Gesamtsystems aus der Beziehung

$$D(E,N) = \int_0^E dE' \, D_1(E', N_1) \, D_2(E - E', N_2) \qquad (1)$$

Wie lautet $\ln D(E,N)$ im Grenzfall $N_1, N_2 >> 1$?

Hinweis: Es gilt

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx = \frac{n! m!}{(n+m+1)!}.$$

Zeigen Sie dies durch partielle Integration.

c) Berechnen Sie nun $D(E,N)$ gemäß Gl. (1) näherungsweise, indem Sie

$$\ln \left[D_1(E', N_1) \, D_2(E - E', N_2) \right]$$

bis zur zweiten Ordnung um das Maximum $E' = \hat{E}_1$ entwickeln. Vergleichen Sie das so erhaltene Ergebnis für $\ln D(E,N)$ mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe b).

d) Ersetzen Sie nun in Gl. (1) das Integral durch den Integranden am Maximum $E' = \hat{E}_1$ und berechnen Sie damit $\ln D(E,N)$. Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes $(N \to \infty)$ alle drei Rechnungen auf dasselbe Ergebnis führen.

e) Identifizieren Sie $k_B \ln D(E,N)$ mit der Entropie $S(E,N)$ und bestimmen Sie daraus die Temperatur $T(E,N)$. Wie lautet damit die kalorische Zustandsgleichung $E(T,N)$ und die spezifische Wärme $C = \frac{\partial E}{\partial T}$