Aufgabe 15 (mündlich): Mikrokanonisches vs kanonisches Ensemble (14 Punkte)

Ein einzelnes klassisches Teilchen der Masse m bewege sich eindimensional im Potential $V(q) = \alpha |q|$. Berechnen Sie seine Eigenschaften zunächst im mikrokanonischen und dann im kanonischen Ensemble.

a) Die Hamilton-Funktion des Teilchens lautet $H = \frac{p^2}{2m} + \alpha |q|$.

Stellen sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese. Skizzieren Sie die Bahnkurve des Teilchens im Phasenraum. Ist dieses System ergodisch?

b) Berechnen Sie für dieses Teilchen das integrale Phasenraumvolumen

$$\varphi(E) = \frac{1}{h} \int\limits_{H(q,p)\leq E} dqdp$$

c) Bestimmen Sie die Phasenraumdichte $\rho(q,p)$ eines mikrokanonischen Ensembles dieser Teilchen mit der Energie E und der Energieunschärfe ΔE. Dabei sei $\Delta E << E$. Wie lautet das Phasenraumvolumen $\Gamma(E)$ bis zur ersten Ordnung in ΔE?

d) Bestimmen Sie die Entropie $S(E)$ und die Temperatur $T(E)$ dieses Systems.

e) Das Teilchen befinde sich nun im thermischen Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T. Wie lautet die Phasenraumdichte $\rho(q,p)$ für dieses Ensemble. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(T)$.

f) Bestimmen Sie daraus die freie Energie $F(T)$, die innere Energie $U(T)$ und die Entropie $S(T)$. Was ergibt sich für die spezifische Wärme C_V?

g) Berechnen Sie die Mittelwerte $\langle q \rangle, \langle p \rangle$ sowie $\langle E_{kin} \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle$ und $\langle V \rangle = \langle \alpha |q| \rangle$.

h) Berechnen Sie die Energieunschärfe $\sqrt{(\Delta E)^2} = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2}$.

i) Vergleichen Sie die Ergebnisse für das mikrokanonische und kanonische Ensemble.

Aufgabe 16 (schriftlich): Spin-1 Teilchen im Magnetfeld (8 Punkte)

Gegeben sei ein System aus N lokalisierten Teilchen mit Spin 1, die sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_Z$ befinden. Jeder Spin hat drei mögliche Einstellungen mit den jeweiligen Energien $E_1 = -\varepsilon$, $E_2 = 0$ und $E_3 = +\varepsilon$. Dabei ist $\varepsilon = 2\mu_B B_0$.

a) Bestimmen Sie zunächst die Zustandssumme $Z(T, B_0, 1)$ für ein Teilchen. Die Zustandssumme für N Teilchen ergibt sich dann gemäß $Z(T, B_0, N) = \left[Z(T, B_0, 1)\right]^N$. Wie lauten $Z(T, B_0, N)$ und die zugehörige freie Energie $F(T, B_0, N)$?

b) Bestimmen sie die innere Energie $U(T, B_0, N)$ und die Entropie $S(T, B_0, N)$.

c) Was ergibt sich für $S(T, B_0, N)$ und $U(T, B_0, N)$ in den Grenzfällen $T \to 0$ und $T \to \infty$?

d) Für Spinsysteme kann die Magnetisierung aus der freien Energie F des Systems berechnet werden gemäß (Diese Formel wird später noch in der Vorlesung hergeleitet)

$$M = -\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial B_0}.$$

Berechnen Sie die Magnetisierung für Spin-1 Teilchen. Was ergibt sich für M im Grenzfall $B_0 \to \infty$?

e) Für genügend kleine Magnetfelder M in Potenzen von B_0 entwickelt werden. Wie lautet M bis zur ersten Ordnung in B_0? Bestimmen Sie daraus die Suszeptibilität, welche definiert ist über:

$$\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B_0}$$