Aufgabe 17 (mündlich): Schwankungen bei idealen Quantengasen (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das mittlere Schwankungsquadrat $\left\langle (\Delta n_i)^2 \right\rangle$ der Besetzung eines Zustands *i* eines idealen Quantengases im großkanonischen Ensemble. Drücken Sie das Ergebnis durch die mittlere Besetzungszahl $\langle n_i \rangle$ aus. Vergleichen Sie die Fälle der Bose-Einstein- und der Fermi-Dirac-Statistik mit dem Grenzfall der klassischen Statistik.

b) Zeigen Sie, dass sich das mittlere Schwankungsquadrat der Teilchenzahl $\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle$ additiv aus den Schwankungsquadraten der Besetzungszahlen zusammensetzt.

c) Kanonisches und großkanonisches Ensemble sind äquivalent, falls die relativen Schwankungen der Teilchenzahl $\sqrt{\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle} / \langle N \rangle$ für große mittlere Teilchenzahlen gegen null gehen. Zeigen Sie, dass dies für Fermisysteme und im klassischen Grenzfall stets zutrifft, dass es aber bei Bosonen zumindest dann nicht mehr gilt, wenn sich nahezu alle Teilchen im tiefsten Einteilchenzustand befinden (Bose-Einstein-Kondensation).

Aufgabe 18 (schriftlich): Gleichverteilungssatz im mikrokanonischen Ensemble (12 Punkte)

Anhand des Beispiels eines *verallgemeinerten Gleichverteilungssatzes* soll demonstriert werden, wie einige wichtige thermodynamische Folgerungen abgeleitet werden können.

a) Berechnen Sie für ein klassisches System mit der Hamiltonfunktion $H(\vec{q}, \vec{p})$ den statistischen Mittelwert in der mikrokanonischen Gesamtheit

$$\left\langle \pi_i \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right\rangle = \frac{1}{D(E)} \frac{1}{h^{3N} N!} \int d^{3N}q \, d^{3N}p \; \pi_i \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \, \delta\left(E - H(\vec{q}, \vec{p})\right)$$

mit $\pi_i, \pi_j \in \{q_1, \ldots, q_{3N}, p_1, \ldots, p_{3N}\}$ und $D(E) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int d^{3N}q \, d^{3N}p \; \delta\left(E - H(\vec{q}, \vec{p})\right)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left\langle \pi_i \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right\rangle = \delta_{ij} k_B T \, .$$

Hinweise: Ersetzen Sie dazu im Integranden $\frac{\partial H}{\partial \pi_j}$ durch $\frac{\partial}{\partial \pi_j}(H - E)$ (da $E = \text{const}$) und führen Sie eine partielle Integration durch. Verwenden Sie

$$S(E) = k_B \ln \varphi(E) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial E} S(E) \, .$$

b) Berechnen Sie nun den selben statistischen Mittelwert im kanonischen Ensemble aus N Teilchen, dessen Dynamik durch die Hamiltonfunktion H_N beschrieben wird, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho_N(q_i, p_i) = \frac{1}{Z(T, V, N)} \exp(-\beta H_N(q_i, p_i)) \, .$$

Leiten Sie auch hier den verallgemeinerten Gleichverteilungssatz her.

c) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis $\langle p_i \dot{q}_i \rangle$, $\langle q_i \dot{p}_i \rangle$, $\langle q_i \dot{q}_i \rangle$ und $\langle p_i \dot{p}_i \rangle$.

d) Berechnen Sie für ein N -Teilchen-System in kartesischen Koordinaten d. h. $q_i = x_i$, $p_i = m\,\dot{x}_i$, $i = 1, \ldots, 3N$ in Gegenwart eines Potentials $V(x_1, \ldots, x_{3N})$ den statistischen Mittelwert des Virials der Kräfte,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{3N} x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\rangle .$$

e) Bestimmen Sie für das System aus Teilaufgabe d) den Mittelwert der kinetischen Energie,

$$\langle T \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3N} \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 \right\rangle ,$$

und vergleichen Sie diesen mit dem in d) erhaltenen Ergebnis.

f) Berechnen Sie die innere Energie U als Funktion der Temperatur T für

i) freie Teilchen: $V = 0$;

ii) harmonische Oszillatoren: $V = \frac{1}{2} m\omega^2 \sum_{i=1}^{3N} x_i^2$;

iii) Teilchen im Schwerefeld: $V = mg \sum_{i=1}^{N} z_i$,

indem Sie die statistischen Mittelwerte der potentiellen Energie $\langle V \rangle$ mit Hilfe des Virials der Kräfte auswerten.

Aufgabe 19 (schriftlich): Thermodynamik relativistischer Teilchen (8 Punkte)

Gemäß den Gesetzen der Relativitätstheorie kann die Lichtgeschwindigkeit c für Teilchen mit endlicher Ruhemasse m_0 nie erreicht oder überschritten werden. Für diese Teilchen gilt die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} .$$

Im Folgenden soll ein zweidimensionales Gas aus N nicht-wechselwirkenden relativistischen Teilchen betrachtet werden, die sich in einem Gebiet der Fläche A bewegen.

a) Berechnen Sie die klassische kanonische Zustandssumme $Z(T, A, N)$ und daraus die freie Energie $F(T, A, N)$ dieses Systems. Hinweis: Substituieren Sie bei der Berechnung der Zustandssumme p durch E und verwenden Sie zur Berechnung von F die Stirling-Formel.

b) Bestimmen Sie die innere Energie U, die Entropie S und den Druck p als Funktion von T, A, N .

c) Bestimmen Sie die spezifische Wärme bei konstanter Fläche C_A in den Grenzfällen $k_B T << m_0 c^2$ und $k_B T >> m_0 c^2$.

d) Berechnen Sie die Impulsverteilung

$$f(\vec{p}) = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{p} - \vec{p}_i) \right\rangle = N \langle \delta(\vec{p} - \vec{p}_1) \rangle$$

des zweidimensionalen relativistischen Gases.