Aufgabe 20 (mündlich): Spektrale Energiedichte und Wiensches Verschiebungsgesetz (8 Punkte)
Die mittlere Besetzungszahl einer Photonenmode ist bei thermischem Licht gegeben durch die Planck-Verteilung

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_k} - 1}$$

mit $\varepsilon_k = \hbar \omega_k = \hbar c k$. Für die Wellenlänge λ gilt $\lambda = 2\pi / k$, für die Frequenz $\nu = \omega / 2\pi$.

a) Berechnen Sie die spektrale Energiedichte pro Frequenzintervall $u_1(\nu) = \frac{1}{V} \sum_k \varepsilon_k \langle n_k \rangle \delta\left(\nu - \frac{\omega_k}{2\pi}\right)$ sowie die spektrale Energiedichte pro Wellenlängenintervall $u_2(\lambda) = \frac{1}{V} \sum_k \varepsilon_k \langle n_k \rangle \delta\left(\lambda - \frac{2\pi}{k}\right)$. Beachten Sie dabei, dass Photonen zwei mögliche Polarisationsrichtungen besitzen. V ist das Volumen.

b) Bestimmen Sie die Frequenzen $\nu_{\max}$ bzw. die Wellenlänge $\lambda_{\max}$, bei denen u_1 bzw. u_2 maximal werden. (Hinweis: Die auftretenden transzendenten Gleichungen brauchen nicht gelöst werden.)

c) Wie hängen $\nu_{\max}$ und $\lambda_{\max}$ von der Temperatur ab (Wiensches Verschiebungsgesetz)? Gilt der Zusammenhang $\nu_{\max} \cdot \lambda_{\max} = c$?

Aufgabe 21 (mündlich): Klassisches ideales Gas aus zweiatomigen Molekülen (7 Punkte)
Ein System aus N nicht-wechselwirkenden zweiatomigen Molekülen sei bei der Temperatur T im Volumen V eingeschlossen. Die Hamiltonfunktion eines einzelnen Moleküls bestehend aus Atomen der Massen m_1 und m_2 lautet

$$H(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}\alpha |\vec{q}_1 - \vec{q}_2|^2$$

a) Berechnen Sie zunächst die klassische kanonische Zustandssumme $Z(T, V, 1)$ für ein Molekül.
Hinweis: Zur Berechnung der Ortsintegrale transformieren Sie zweckmäßigerweise auf Relativ- und Schwerpunktkoordinaten.

b) Die Zustandssumme für N ununterscheidbare Teilchen ergibt sich draus gemäß

$$Z(T,V,N) = \frac{1}{N!}\left[Z(T,V,1)\right]^N.$$

Berechnen Sie $Z(T,V,N)$ und daraus die freie Energie $F(T,V,N)$. Verwenden Sie dazu die Stirlingformel. Zeigen Sie, dass F eine extensive Größe ist, d. h., dass bei Vergrößerung von V und N um einen Faktor γ sich auch F um denselben Faktor γ vergrößert.

c) Berechnen Sie den Druck $p(T,V,N)$ dieses Gases.

d) Berechnen Sie die innere Energie $U(T,V,N)$ und daraus die spezifische Wärme C_V.

Aufgabe 22 (schriftlich): Zweidimensionales nicht-ideales Gas (12 Punkte)

Eine adsorbierte Oberflächenschicht der Fläche A bestehe aus N Atomen, die sich frei über die Oberfläche bewegen und wie ein klassisches zweidimensionales Gas behandelt werden können. Die Atome wechselwirken über ein Potential $W(r)$ miteinander, das nur von ihrem gegenseitigen Abstand r abhängt.

a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme und das großkanonische Potential in der Virialentwicklung zweiter Ordnung.

b) Bestimmen Sie den Druck des Gas-Filmes, d.h. die mittlere Kraft pro Längeneinheit als Funktion der Teilchendichte $n = N / A$.

c) Berechnen Sie den zweiten Virialkoeffizienten B_2 für das in der Vorlesung eingeführte Modellpotential

$$W(r) = \begin{cases} \infty & r < r_0 \\ -4\varepsilon \cdot \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^6 & r \geq r_0 \end{cases}$$

im Grenzfall $k_0 T >> \varepsilon$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in der Vorlesung behandelten dreidimensionalen Fall.