

Aufgabe 23 (mündlich): Bohr van Leeuwen Theorem

(4 Punkte)

Für N Elektronen an den Orten \vec{r}_i und mit den Impulsen \vec{p}_i , die sich im elektromagnetischen Feld mit den Potentialen \vec{A} und ϕ befinden, lautet der Hamilton-Operator:

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2m} (\vec{p}_i - q\vec{A})^2 + e\phi \right) + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

wobei der hintere Term die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Teilchen beschreibt. Zeigen Sie, dass es für dieses System keinen Magnetismus gibt und damit die Aussage des Bohr von Leeuwen Theorem gilt, nämlich, dass es in der klassischen Physik im thermischen Gleichgewicht keine Magnetisierung gibt.

Hinweis: Betrachten Sie die freie Energie.

Aufgabe 24 (mündlich): Magnetismus der Bahnbewegung von Elektronen

(10 Punkte)

Wir betrachten ein System aus N nicht-wechselwirkenden Elektronen der Ladung $-e$ und der Masse m im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. Wie in der Quantenmechanik gezeigt wird, lauten die Energieeigenwerte in diesem Fall

$$E(n, k_z) = 2\mu_B B_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}.$$

Dabei ist μ_B das Bohrsche Magneton, n ist eine diskrete Quantenzahl mit $n = 0, 1, 2, \dots$ und k_z ein kontinuierlicher Wellenvektor. Der Entartungsgrad eines Zustands ist gegeben durch

$$g(B_0) = \frac{eL_x L_y}{2\pi\hbar} B_0$$

mit den Normierungslängen L_x, L_y, L_z und dem Volumen $V = L_x L_y L_z$.

a) Die Zustandssumme für ein einzelnes Teilchen ist dann gegeben durch

$$Z(T, V, B_0, 1) = \frac{L_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \sum_{n=0}^{\infty} g(B_0) e^{-\beta E(n, k_z)}.$$

Berechnen Sie $Z(T, V, B_0, 1)$.

b) Die Temperatur sei so hoch, dass das N -Elektronensystem näherungsweise der klassischen Statistik genügt. In diesem Fall gilt

$$Z(T, V, B_0, N) = \frac{[Z(T, V, B_0, 1)]^N}{N!}.$$

Berechnen Sie $Z(T, V, B_0, N)$ und daraus unter Verwendung der Stirling-Formel die freie Energie $F(T, V, B_0, N)$.

c) Bestimmen sie die Entropie $S(T, V, B_0, N)$, die innere Energie $U(T, V, B_0, N)$ und den Druck $p(T, V, B_0, N)$.

d) Berechnen Sie die Magnetisierung $M = -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial B_0}$. Was ergibt sich für M im Grenzfall

$B_0 \rightarrow \infty$? Für genügend kleine Magnetfelder können sie M entwickeln. Wie lautet M bis zur

ersten Ordnung in B_0 ? Bestimmen Sie daraus die Suszeptibilität $\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B_0}$. Um welchen Typ von Magnetismus (Dia-, Para- oder Ferromagnetismus) handelt es sich?

Aufgabe 25 (schriftlich): Klassische Theorie des Para- und Ferromagnetismus (12 Punkte)

Nach der klassischen Vorstellung besteht ein paramagnetisches Material aus N magnetischen Momenten $\vec{\mu}_i$ im Volumen V , deren Orientierung im Raum durch die beiden Winkel ϑ_i und φ_i beschrieben wird. Dabei sind alle Einstellungen mit $0 \leq \varphi_i < 2\pi$, $0 \leq \vartheta_i < \pi$ möglich und es gilt $|\vec{\mu}_i| = \mu$. Die Hamiltonfunktion für dieses System im homogenen Magnetfeld \vec{B}_0 lautet

$$H = -\sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{B}_0 = -\sum_i \mu B_0 \cos \vartheta_i,$$

wobei die z-Achse in die Richtung des Magnetfeldes gelegt werde. Die kanonische Verteilung lautet dann

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \quad \text{mit} \quad Z = \int \prod_{i=1}^N (\sin \vartheta_i d\vartheta_i d\varphi_i) e^{-\beta H}.$$

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, B_0, N)$ und daraus die freie Energie $F(T, B_0, N)$ des Systems.

b) Zeigen Sie, dass für die Magnetisierung $M = \frac{1}{V} \sum_i \langle \mu_{i,z} \rangle$ gilt:

$$M = -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial B_0}.$$

Dabei ist $\mu_{i,z}$ die z-Komponente des magnetischen Moments.

c) Berechnen Sie damit die Magnetisierung und zeigen Sie, dass diese geschrieben werden kann als

$$M = \frac{N\mu}{V} L\left(\frac{\mu B_0}{k_B T}\right). \quad (1)$$

Die Funktion $L(x)$ heißt Langevin-Funktion. Skizzieren Sie $L(x)$.

d) Berechnen Sie im Grenzfall $B_0 \rightarrow 0$ die Suszeptibilität $\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B_0}$ und zeigen Sie, dass diese das Curiesche Gesetz $\chi = C/T$ erfüllt. Wie lautet die Konstante C ?

e) In der Weißschen Theorie des Ferromagnetismus geht man davon aus, dass sich das effektive Magnetfeld \vec{B}_{eff} am Ort eines magnetischen Moments zusammensetzt aus dem externen Feld \vec{B}_0 und einem internen Feld \vec{B}_1 , das durch die anderen Momente erzeugt wird. Es sei $\vec{B}_1 = \lambda \vec{M}$. Ersetzen Sie in Gleichung (1) B_0 durch B_{eff} und zeigen Sie anhand einer grafischen Lösung dieser Gleichung, dass unter geeigneten Bedingungen auch für $B_0 = 0$ eine nicht-verschwindende Magnetisierung $M = M_s \neq 0$ auftreten kann. In welchem Temperaturbereich existiert solch eine Lösung?