1. Übung zur Festkörpertheorie II (SS 2015) **Prof. Krüger**

Ausgabedatum: 14.04.2015 Abgabedatum: 21.04.2015

Aufgabe 1: Vertauschungsrelationen für Fermionen (3 Punkte)

a) Der Antikommutator der Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist durch

$$[\hat{A},\, \hat{B}]_+ \;=\; \hat{A}\,\hat{B} \,+\, \hat{B}\,\hat{A}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass für einen weiteren Operator $\hat{D}$ folgende Relation gilt:

$$[\hat{A},\, \hat{B}\,\hat{D}]_- \;=\; [\hat{A},\, \hat{B}]_+\,\hat{D} \,-\, \hat{B}\,[\hat{A},\, \hat{D}]_+ \;.$$

b) In der Vorlesung haben Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{c}_j^+$ und $\hat{c}_j$ für Fermionen kennengelernt. Verwenden Sie Antikommutator-Relationen dieser Operatoren, um folgende Kommutatoren $[\hat{A},\, \hat{B}]_- \,=\, \hat{A}\,\hat{B} \,-\, \hat{B}\,\hat{A}$ zu berechnen.

i)

$$[\hat{n}_j,\, \hat{c}_k]_- \qquad \text{und} \qquad [\hat{n}_j,\, \hat{c}_k^+]_- \qquad \text{mit} \qquad \hat{n}_j \;=\; \hat{c}_j^+\,\hat{c}_j \;.$$

ii)

$$[\hat{c}_i^+\,\hat{c}_j,\, \hat{c}_l^+\,\hat{c}_m]_- \;=\; \alpha\,\cdot\,\hat{c}_i^+\,\hat{c}_m \,+\, \beta\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_j \;.$$

Berechnen Sie α und β.

iii)

$$\begin{aligned} [\hat{c}_i^+\,\hat{c}_j\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_m,\, \hat{c}_n^+\,\hat{c}_p]_- \;&=\; (\alpha\,\cdot\,\hat{c}_i^+\,\hat{c}_p \,+\, \beta\,\cdot\,\hat{c}_n^+\,\hat{c}_j)\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_m \\ &+\; \hat{c}_i^+\,\hat{c}_j\,(\gamma\,\cdot\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_p \,+\, \zeta\,\cdot\,\hat{c}_n^+\,\hat{c}_m) \;. \end{aligned}$$

Berechnen Sie α, β, γ und ζ.

Nützliche Relation:

$$[\hat{A}\,\hat{B},\, \hat{D}]_- \;=\; [\hat{A},\, \hat{D}]_-\,\hat{B} \,+\, \hat{A}\,[\hat{B},\, \hat{D}]_- \;.$$

Aufgabe 2: Erwartungswerte für Fermionen (2 Punkte)

Die Eigenzustände des Hamiltonoperators

$$\hat{H} \;=\; \sum_{j\,=\,1}^{\infty} \varepsilon_j\,\hat{c}_j^+\,\hat{c}_j$$

haben die Form

$$|\phi\rangle \;=\; \prod_{j\,=\,1}^{\infty} (\hat{c}_j^+)^{n_j}\,|0\rangle \;.$$

a) Berechnen Sie

$$\hat{n}_l\,|\phi\rangle \qquad \text{mit} \qquad \hat{n}_l \;=\; \hat{c}_l^+\,\hat{c}_l \;.$$

b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte

$$\text{a)} \qquad \langle\phi|\hat{c}_l^+\,\hat{c}_m|\phi\rangle \;,$$

$$\text{b)} \qquad \langle\phi|\hat{c}_i^+\,\hat{c}_l^+\,\hat{c}_k\,\hat{c}_m|\phi\rangle \;.$$

Drücken Sie Ihr Ergebnis durch die Besetzungszahlen n_k und n_m aus.

Aufgabe 3: Teilchendichteoperator (2 Punkte)

Der Operator der Teilchendichte hat in der Ortsdarstellung die Form

$$\hat{\rho}\,(\vec{r}\,) \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{N} \delta\,(\vec{r}\,-\,\vec{r}_i)\;.$$

a) Transformieren Sie diesen Operator in die Besetzungszahldarstellung $\hat{\rho}_F\,(\vec{r}\,)$ mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{c}^{+}_{\vec{k}\,\sigma}$ und $\hat{c}_{\vec{k}\,'\,\sigma'}$.
   Verwenden Sie als Einteilchenbasis ebene Wellen der Form

$$\psi_{\vec{k}\,\sigma}\,(\vec{r}\,) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\,\cdot\,\mathrm{e}^{i\,\vec{k}\,\vec{r}}\,\cdot\,\chi_\sigma\;.$$

   Dabei ist Ω das Normierungsvolumen.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $\hat{\rho}_F\,(\vec{r}\,)$

$$\tilde{\hat{\rho}}_F\,(\vec{q}\,) \;=\; \frac{1}{\Omega}\int\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-i\,\vec{q}\,\vec{r}}\,\hat{\rho}_F\,(\vec{r}\,)\,d^3\,r\;.$$

Aufgabe 4: Zwei-Niveau-System (3 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Systems mit zwei jeweils spinentarteten Energieniveaus ε_a und ε_b hat die Form

$$\hat{H} \;=\; \varepsilon_a\left(\hat{c}^{+}_{a\uparrow}\,\hat{c}_{a\uparrow}\,+\,\hat{c}^{+}_{a\downarrow}\,\hat{c}_{a\downarrow}\right)\,+\,\varepsilon_b\left(\hat{c}^{+}_{b\uparrow}\,\hat{c}_{b\uparrow}\,+\,\hat{c}^{+}_{b\downarrow}\,\hat{c}_{b\downarrow}\right)\;.$$

a) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\phi_1\rangle \;=\; \hat{c}^{+}_{a\uparrow}\,\hat{c}^{+}_{b\uparrow}\,|0\rangle$$

   ein Eigenzustand des Systems ist. Welche Energie besitzt das System in diesem Zustand?

b) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\phi_2\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{c}^{+}_{a\uparrow}\,+\,\hat{c}^{+}_{a\downarrow}\right)\,\hat{c}^{+}_{b\uparrow}\,|0\rangle$$

   normiert ist. Ist $|\phi_2\rangle$ auch ein Eigenzustand des Systems?

c) Berechnen Sie für $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$ jeweils die Erwartungswerte der Spinoperatoren

$$\hat{S}_z \;=\; \frac{\hbar}{2}\sum_j\left(\hat{c}^{+}_{j\uparrow}\,c_{j\uparrow}\,-\,\hat{c}^{+}_{j\downarrow}\,\hat{c}_{j\downarrow}\right) \qquad \text{und} \qquad \hat{S}_x \;=\; \frac{\hbar}{2}\sum_j\left(\hat{c}^{+}_{j\uparrow}\,\hat{c}_{j\downarrow}\,+\,\hat{c}^{+}_{j\downarrow}\,c_{j\uparrow}\right)$$

   mit $j \,=\, a,\, b$.