Aufgabe 38 (mündlich): Wellenlängen von Atomen (7 Punkte)

a) Die Wellenlänge der ersten Linie der Lyman-Serie in ionisiertem Helium ist $\lambda = 30,3797\,\mathrm{nm}$. Bestimmen Sie

(i) die Rydberg-Konstante für $^4He^+$,

(ii) die Ionisierungsenergie von He^+ in eV.

b) Folgende Wellenlängen einer Übergangsserie eines Atoms X wurden beobachtet und mit Linien aus einer Wasserstoffserie verglichen:

H-Atom [Å]	6562,8		4861,3		4340,5		4101,7
Atom X [Å]	6560,1	5411,6	4859,3	4561,6	4338,7	4199,9	4100,0

Bestimmen Sie das Atom, zu dem die unbekannte Serie gehört, und die Zustände, die damit verknüpft werden.

Aufgabe 39 (schriftlich): Magnetische Resonanz und Bloch-Gleichungen (11 Punkte)

Wie in der Vorlesung hergeleitet wurde, bewegt sich die Magnetisierung $\vec{M}$ unter dem Einfluss eines Magnetfeldes $\vec{B}(t)$ gemäß der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = -g\frac{\mu_\mathrm{B}}{\hbar}\vec{M} \times \vec{B} \ .$$

Für das Magnetfeld gelte im folgenden

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = B_0\vec{e}_z + B_1\left[\vec{e}_x\cos(\omega t) + \vec{e}_y\sin(\omega t)\right]$$

sowie die Abkürzungen

$$\hbar\omega_0 = g\mu_\mathrm{B}B_0 \qquad \text{und} \qquad \hbar\omega_1 = g\mu_\mathrm{B}B_1 \ .$$

a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die Komponenten M_x, M_y und M_z?

b) Spontane Emissionsprozesse sowie Kopplungen an andere Freiheitsgrade führen zu einer Relaxation der Magnetisierung. Man unterscheidet dabei üblicherweise die transversale Relaxation, beschrieben durch eine Relaxationszeit T_2, und die longitudinale Relaxation, beschrieben durch eine Relaxationszeit T_1. Diese Prozesse führen zu zusätzlichen Beiträgen in den Bewegungsgleichungen gemäß

$$\left.\frac{\mathrm{d}M_{x,y}}{\mathrm{d}t}\right|_\mathrm{rel} = -\frac{M_{x,y}}{T_2} \ , \qquad \left.\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}t}\right|_\mathrm{rel} = -\frac{M_z - M_0}{T_1} \ .$$

Dabei ist $M_0\vec{e}_z$ die Gleichgewichtsmagnetisierung in Abwesenheit des rotierenden Feldes B_1. Wie lauten damit die Bewegungsgleichungen für M_x, M_y und M_z? Diese Gleichungen heißen auch Bloch-Gleichungen.

c) Die Bloch-Gleichungen nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man sie in ein mit $\vec{B}_1$ mitrotierendes Koordinatensystem transformiert. Diese Transformation wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}\tilde{M}_x &= M_x \cos(\omega t) + M_y \sin(\omega t)\\ \tilde{M}_y &= -M_x \sin(\omega t) + M_y \cos(\omega t)\\ \tilde{M}_z &= M_z\end{aligned}$$

Wie lauten die Bewegungsgleichungen für $\tilde{M}_x$, $\tilde{M}_y$ und $\tilde{M}_z$?

d) Bestimmen Sie die stationäre Lösung dieses Gleichungssystems ($\mathrm{d}\tilde{M}_i/\mathrm{d}t = 0$) und skizzieren Sie den Verlauf der drei Komponenten $\tilde{M}_x$, $\tilde{M}_y$ und $\tilde{M}_z$ als Funktion der Verstimmung $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Nehmen Sie für die Skizze gleiche Relaxationszeiten an, d.h. $T_1 = T_2$.

e) Im folgenden werde die Relaxation vernachlässigt, d.h. $1/T_1 = 1/T_2 = 0$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Betrag der Magnetisierung zeitlich konstant ist, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|M|^2 = 0\ .$$

Bestimmen Sie mit dem Ansatz $\vec{\tilde{M}}(t) = \vec{\tilde{M}}^0 e^{-i\Omega t}$ die Eigenfrequenzen des Systems. Wie lautet die Lösung für $\vec{\tilde{M}}(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\tilde{M}_x(0) = \tilde{M}_y(0) = 0$, $\tilde{M}_z(0) = M_0$?