Aufgabe 19 (mündlich): Dirac-Notation (4 Punkte)

Es seien $|\varphi_n\rangle$ die Eigenzustände eines hermiteschen Operators $\hat{H}$ (dies kann z.B. der Hamilton-Operator eines physikalischen Systems sein) und es werde vorausgesetzt, dass diese Zustände eine diskrete, orthonormierte Basis bilden. Der Operator $\hat{U}(m,n)$ sei definiert durch

$$\hat{U}(m,n) = |\varphi_m\rangle \langle\varphi_n| \ .$$

a) Bestimmen Sie den zu $\hat{U}(m,n)$ adjungierten Operator $\hat{U}^\dagger(m,n)$.

b) Bestimmen Sie den Kommutator $[\hat{H}, \hat{U}(m,n)]$.

c) Beweisen Sie die Beziehung

$$\hat{U}(m,n)\hat{U}^\dagger(p,q) = \delta_{nq}\hat{U}(m,p)\,.$$

d) Berechnen Sie die Spur $\mathrm{Sp}\{\hat{U}(m,n)\}$.

e) Es sei $\hat{A}$ ein Operator mit den Matrixelementen $A_{mn} = \langle\varphi_m|\,\hat{A}\,|\varphi_n\rangle$. Beweisen Sie die Beziehung

$$\hat{A} = \sum_{m,n} A_{mn}\hat{U}(m,n)\,.$$

f) Zeigen Sie, dass $A_{pq} = \mathrm{Sp}\{\hat{A}\hat{U}^\dagger(p,q)\}$.

Aufgabe 20 (mündlich): Vertauschende Observable, v. S. k. O. (5 Punkte)

Ein physikalisches System mit einem dreidimensionalen Zustandsraum werde in einer aus den drei Kets $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ und $|u_3\rangle$ gebildeten orthonormierten Basis beschrieben. Die beiden Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{B}$ werden in dieser Basis (mit der angegebenen Reihenfolge) durch die Matrizen

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert; ω_0 und b sind reelle Konstanten.

a) Sind $\hat{H}$ und $\hat{B}$ hermitesch?

b) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ und $\hat{B}$ vertauschen. Geben Sie eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von $\hat{H}$ und $\hat{B}$ an.

c) Welche Operatorenmenge $\{\hat{H}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{H}, \hat{B}\}$, $\{\hat{H}^2, \hat{B}\}$ bildet einen vollständigen Satz kommutierender Observabler (v. S. k. O.)?

Aufgabe 21 (schriftlich): Zwei-Niveau-System (3 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Zwei-Niveau-Systems kann geschrieben werden als

$$\hat{H} = E_1 \left|\psi_1\right\rangle \left\langle\psi_1\right| + E_2 \left|\psi_2\right\rangle \left\langle\psi_2\right| + V \left|\psi_1\right\rangle \left\langle\psi_2\right| + V' \left|\psi_2\right\rangle \left\langle\psi_1\right| \ ,$$

mit $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$, sowie $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$ und $V, V' \in \mathbb{C}$.

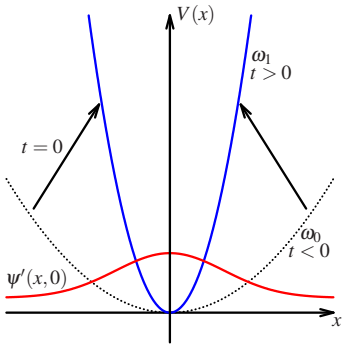
a) Welche Beziehung muss zwischen V und V' bestehen, damit $\hat{H}$ hermitesch ist.

b) Untersuchen Sie die Wirkung von $\hat{H}$ auf $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$. Sind sie Eigenzustände zu $\hat{H}$?

c) Berechnen Sie für den Fall $V' = V^* = const.$ die Eigenwerte zu $\hat{H}$. Untersuchen Sie den Grenzfall $|V| \ll |E_1 - E_2|$.

Aufgabe 22 (schriftlich): Potentialänderung beim harmonischen Oszillator (7 Punkte)

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator der Frequenz ω_0. Im Zeitraum $t < 0$ befinde sich der Oszillator im Grundzustand $\psi_0(x)$. Zur Zeit $t = 0$ wird durch einen äußeren Eingriff die Eigenfrequenz des Oszillators von ω_0 instantan auf ω_1 verändert. Dabei sei $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0 \ll \omega_1$. Der Zustand unmittelbar nach der Störung $\psi'(x, t = 0)$ ist nun kein Eigenzustand des Systems mehr.



a) Wie lauten die neuen Eigenfunktionen $\psi_0'(x)$, $\psi_1'(x)$ und $\psi_2'(x)$ zum HO mit ω_1 in Ortsdarstellung?

b) Entwickeln Sie $\psi'(x, 0) = \psi_0(x)$ bis zur ersten Ordnung in $\frac{\Delta\omega}{\omega_1}$. Dadurch kann $\psi'(x, t = 0)$ durch die neuen Eigenfunktionen ausgedrückt werden:

$$\psi'(x, 0) = c_0\psi_0'(x) + c_2\psi_2'(x) \ .$$

Bestimmen Sie c_0 und c_2.

c) Wie lauten die Wellenfunktion $\psi'(x, t)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t) = |\psi'(x, t)|^2$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$? *(Beschränken Sie sich wieder auf die erste Ordnung.)* Nach welcher Zeit $t = \tau$ wird die Anfangswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, 0)$ gerade wieder erreicht?

d) Berechnen Sie den Ortserwartungswert $\langle\hat{x}\rangle$ und die mittlere quadratische Unschärfe $(\Delta x)^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$ als Funktion der Zeit. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der quadratischen Unschärfe $(\Delta x)_0^2$ des Grundzustands $\psi_0'(x)$. Für die quadratische Unschärfe des Impulses ergibt sich

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega_1}{2}\left[1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_1}\cos(2\omega_1 t)\right]$$

Was ergibt sich für das Unschärfeprodukt $\Delta x \Delta p$?

Hinweis: Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators der Frequenz ω lauten:

$$\psi_n(x) = A_n e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} H_n\left(\sqrt{\alpha}x\right) \quad mit \quad A_n = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}} \quad und \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar} \ ,$$

$$H_0(\xi) = 1 \ , \qquad H_1(\xi) = 2\xi \ , \qquad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$