Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Vorkurs Physik

19.09.2016 – 28.09.2016

Fachbereich Physik

Aufgaben

Blatt 1

Aufgabe 1: Vektoren in Komponentendarstellung

a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   i) Berechnen Sie die Beträge $|\vec{a}\,|$ und $|\vec{b}|$ der Vektoren.

   ii) Berechnen Sie die Vektorsumme $\vec{a} + \vec{b}$, die Vektordifferenz $\vec{a} - \vec{b}$ und deren Beträge.

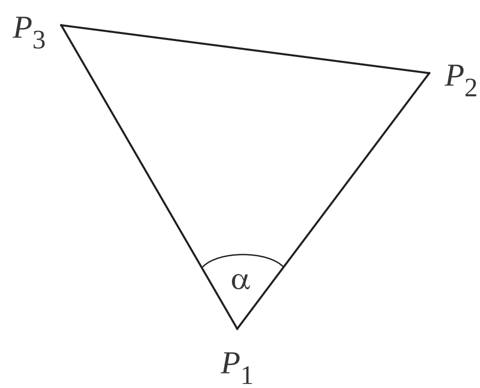
   iii) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und daraus den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

b) $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ seien orthogonale Einheitsvektoren. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = 2\,\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z$ und $\vec{b} = \vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y - 3\,\vec{e}_z$.

   i) Berechnen Sie $|\vec{a} + \vec{b}|$, $3\,\vec{a} + 2\,\vec{b}$ und $4\,\vec{a} \cdot 2\,\vec{b}$.

   ii) Wie lang ist die Projektion auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

Aufgabe 2: Vektoren in komponentenfreier Darstellung



a) Von dem abgebildeten Dreieck sind die Längen der Strecken $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_1P_3}$, sowie der Winkel α bekannt. Berechnen Sie daraus die Länge der Strecke $\overline{P_2P_3}$.

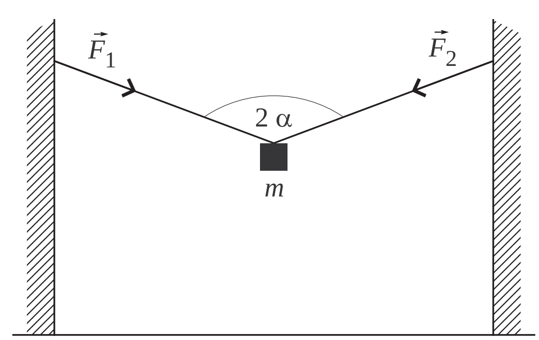
b) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für Vektoren:

$$\big||\vec{a}\,| - |\vec{b}|\big| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq \big||\vec{a} + \vec{b}|\big| \,.$$

c) Die vom Koordinatenursprung ausgehenden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ charakterisieren die Punkte P_1 und P_2. Geben Sie den Vektor $\vec{c}\,(t)$ als Funktion des Parameters t an, der eine durch P_1 und P_2 gehende Gerade beschreibt.

   Geben Sie den Verbindungsvektor vom Koordinatenursprung zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_1P_2}$ an.

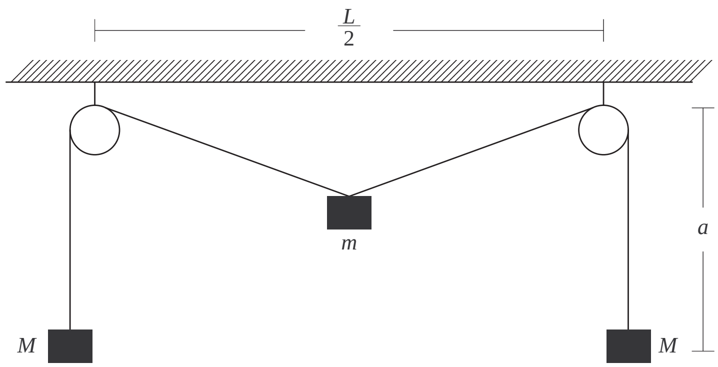
Aufgabe 3: Zerlegung von Kräften



a) Zwischen zwei Hauswänden hängt zur Beleuchtung der Straße eine Lampe mit der Masse $m = 5$ kg an zwei Seilen. Berechnen Sie die Beträge der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, die die Seile auf die Hauswände ausüben. In welchem Bereich darf der Wert des Winkels α liegen, wenn ein Seil maximal mit einer Kraft von 100 N belastbar ist?

b) An jedem Ende eines Seils der Länge L, das über zwei Rollen im Abstand $\frac{L}{2}$ gelegt ist, hängt eine Masse M. In der Seilmitte hängt eine weitere Masse m. Berechnen Sie den Abstand a zwischen einer Rolle und der darunterhängenden Masse M als Funktion des Massenverhältnisses $\lambda = \frac{m}{M}$.

Wie groß ist a speziell für $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{1}{2}$? Für welches λ ist $a = 0$?



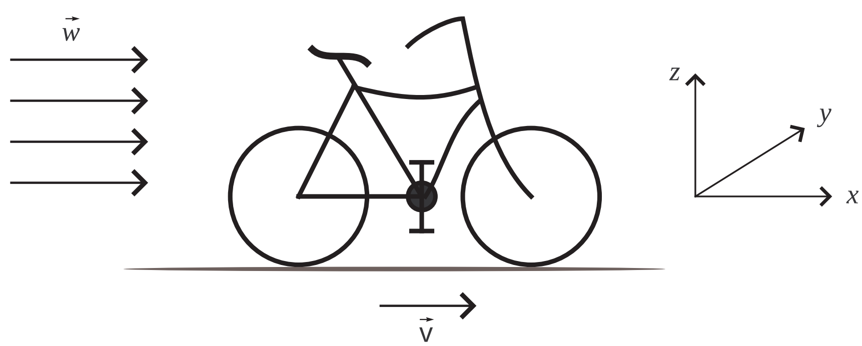
Hinweis: Gehen Sie von einem masselosen Seil und unendlich dünnen Rollen aus.
Es gilt: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Aufgabe 4: Luftwiderstand beim Fahrradfahren

Auf einen Radfahrer wirkt durch die Wechselwirkung mit der Umgebungsluft eine Luftwiderstandskraft (Luftreibungskraft) $\vec{F}^{(L)}$, die von der Relativgeschwindigkeit $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$ zwischen Fahrer und Luft abhängt. Dabei bezeichnet $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Radfahrers und $\vec{w}$ ist die Geschwindigkeit der Luft (Windgeschwindigkeit). Näherungsweise hat $\vec{F}^{(L)}$ die Form

$$\vec{F}^{(L)} = -k\,|\vec{u}\,|\,\vec{u} \qquad \text{mit} \qquad k > 0\ .$$

Die Konstante k ist unabhängig von $\vec{u}$. (Sie hängt u. a. von der Gestalt des Radfahrers ab.)



Ein Radfahrer bewegt sich in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die auf ihn wirkende Kraft $\vec{F}^{(L)}$ für folgende Fälle (mit $w > 0$):

$$
\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \text{Windstille} & \vec{w} = 0 \\
\text{(b)} & \text{Rückenwind} & \vec{w} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{(c)} & \text{Gegenwind} & \vec{w} = \begin{pmatrix} -w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{(d)} & \text{Seitenwind} & \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{array}
$$

Wie groß ist die Kraft jeweils in x-Richtung? Geben Sie alle Ergebnisse auch für den Spezialfall $w = v$ an. Diskutieren Sie Ihre Resultate.

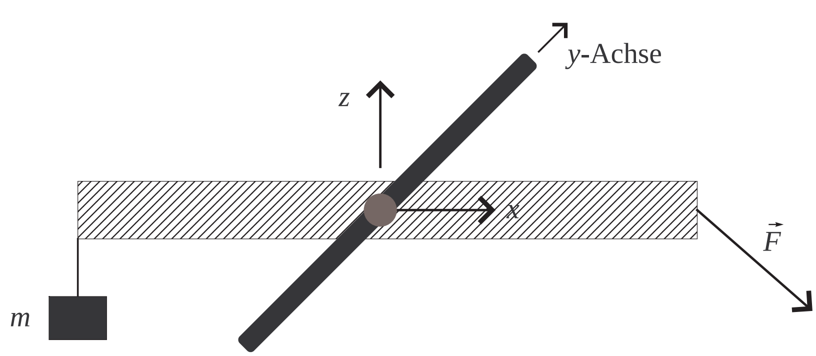
Aufgabe 5: Kreuzprodukt

a) Zeigen Sie, dass für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgende Beziehung gilt:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 \, b^2 \ .$$

b) Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus Aufgabe 1 a) das Kreuzprodukt.

c) Ein Stab der Länge $L = 1$ m sei in der Mitte um eine in y-Richtung zeigende Achse drehbar gelagert. An einem Ende des Stabes greife eine Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3\,N \\ 0 \\ -4\,N \end{pmatrix}$ an. Berechnen Sie das auf die Mitte des Stabes bezogene Drehmoment. Wie groß muss ein am anderen Ende des Stabes hängendes Gewicht sein, um das Gesamtdrehmoment zum Verschwinden zu bringen? Wie groß ist das Gewicht zu wählen, wenn die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4\,N \end{pmatrix}$ wirkt?



Aufgabe 6: Elementare Funktionen

In dieser Aufgabe werden die Eigenschaften einiger elementarer Funktionen $y = f(x)$ behandelt.

a) Skizzieren Sie die reellen Funktionen $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f(x) = x^4$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ für x im Intervall $[-2, 2]$. Geben Sie die zugehörigen Umkehrfunktionen an.

b) Häufig stellt man die Argumente der trigonometrischen Funktionen im „Bogenmaß" dar. Dabei rechnet man den Winkel α (in Grad) auf die Länge eines entsprechenden Bogens an einem Einheitskreis um: $x = \frac{2\pi}{360°} \cdot \alpha$.

Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ und $f(x) = \tan(x)$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. Geben Sie die zugehörigen Umkehrfunktionen an und skizzieren Sie diese in einem geeigneten Intervall.

c) Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = 2^x$ und $f(x) = \log_2 x$, sowie die Funktionen $f(x) = \exp(x) = e^x$ und $f(x) = \ln x$ für x im Intervall $[-2, 2]$.

d) Geben Sie die Umkehrfunktion $g(y)$ von der Funktion $y = f(x) = a^x$ an. Drücken Sie Ihr Ergebnis durch den natürlichen Logarithmus $\ln y$ aus.

e) Berechnen Sie $\log_5 125$ und $\log_3 \left(\frac{81}{27}\right)$.

Aufgabe 7: Exponentialfunktion

a) Das radioaktive Kohlenstoffisotop C_{14} zerfällt nach dem Tod eines Lebewesens in dessen Körper mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Wie alt ist ein Fundstück, bei dem nur noch 20 % C_{14}-Gehalt festgestellt wird?

b) Ein Wetterballon steigt in der Atmosphäre auf. Der Luftdruck in der Höhe z (relativ zum Meerespiegel) wird durch die barometrische Höhenformel

$$p(z) = \mathrm{e}^{-\frac{z}{z_0}} \cdot p_0 \qquad \text{mit} \qquad p_0 = 1{,}013 \text{ bar} = 101{,}3 \text{ kPa} \qquad \text{und} \qquad z_0 = 8{,}43 \text{ km}$$

beschrieben. Wie hoch ist der Ballon, wenn nur noch die Hälfte des Luftdrucks am Ballon gemessen wird?

Aufgabe 8: Differentialrechnung

a) Berechnen Sie, ausgehend von der Definition

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

die Ableitung von $f(x) = 1/x^2$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln die erste Ableitung von

(1) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x}$	(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$
(3) $f(x) = x\,e^x$	(4) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$
(5) $f(x) = \sin^2(x)$	(6) $f(x) = \sin(x^2)$
(7) $f(x) = x^x$	(8) $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ (Die Koeffizienten a_n seien konstant.)

Anmerkung: Eventuelle Nullstellen im Nenner von $f(x)$ sind von den Definitionsbereichen von $f(x)$ und $f'(x)$ ausgeschlossen.