Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Vorkurs Physik

19.09.2016 – 28.09.2016

Fachbereich Physik

Aufgaben

Blatt 2

Aufgabe 9: Grenzwerte

Berechnen Sie unter Verwendung der Regeln von *de l'Hospital* die folgenden Grenzwerte:

a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{3\,x^2 - 5}{x + 4\,x^2}$$

b) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{2\,x - \pi \cdot \sin x}$$

c) $$\lim_{x \to 0} x^n \cdot \ln x$$

d) $$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}\,, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}\,, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n}$$

e) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x + x^2} \right) .$$

Aufgabe 10: Ableitung von Vektorfunktionen

a) Gegeben sei die Vektorfunktion (kurz: der Vektor) $\vec{a}\,(t) = \begin{pmatrix} 3\,t \\ 2\,t^2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung

$$\dot{\vec{a}}\,(t) \equiv \frac{d}{d\,t}\,\vec{a}\,(t) \qquad \text{und} \qquad \ddot{\vec{a}}\,(t) \equiv \frac{d^2}{d\,t^2}\,\vec{a}\,(t)$$

der Vektorfunktion. Berechnen Sie

$$\vec{A}\,(t) = \int \vec{a}\,(t)\,d\,t\ .$$

b) Zeigen Sie, dass für zwei Vektorfunktionen $\vec{a}\,(t)$ und $\vec{b}\,(t)$ gilt:

$$\frac{d}{d\,t} \Big(\vec{a}\,(t) \cdot \vec{b}\,(t) \Big) = \dot{\vec{a}}\,(t) \cdot \vec{b}\,(t) + \vec{a}\,(t) \cdot \dot{\vec{b}}\,(t)\ .$$

Gehen Sie dabei aus von der Ableitung einer skalaren Funktion (vgl. Aufgabe 8) bzw. der Ableitung eines Vektors

$$\frac{d}{d\,t}\,\vec{a}\,(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{a}\,(t + h) - \vec{a}\,(t)}{h}\ .$$

c) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{a}\,(t) \cdot \dot{\vec{a}}\,(t) = |\vec{a}\,(t)|\,\frac{d}{d\,t}\,|\vec{a}\,(t)|\ .$$

Aufgabe 11: Kreisbahn

Ein Körper bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius R. Die Bahnkurve lautet

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \\ z\,(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\,(\omega\,t) \\ \sin\,(\omega\,t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dabei sei die sogenannte Winkelgeschwindigkeit ω konstant.

a) Skizzieren Sie die Bahn in der x-y-Ebene. Wo befindet sich das Teilchen zur Zeit $t = 0$ und wo bei $t = \frac{3\,\pi}{2\,\omega}$?

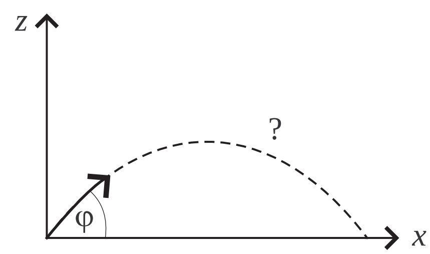
b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}\,(t) \equiv \dot{\vec{r}}\,(t)$, die Beschleunigung $\vec{a}\,(t) \equiv \ddot{\vec{r}}\,(t)$ und die Beträge von $\vec{v}\,(t)$ und $\vec{a}\,(t)$. Geben Sie $v\,(t)$ und $\vec{a}\,(t)$ für $t = 0$ und $t = \frac{3\,\pi}{2\,\omega}$ an.

c) Was folgt aus Aufgabe 10 c) für die Kreisbewegung?

Aufgabe 12: Wurfbahn

Ein Ball wird unter einem Winkel φ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abgeworfen und bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Bahnkurve

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} v_0\,(t)\,\cos\,\varphi \\ 0 \\ v_0\,t\,\sin\,\varphi - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \end{pmatrix} .$$



a) Skizzieren Sie $x\,(t)$, $z\,(t)$ und die Flugbahn $z\,(x)$ für $\varphi = 60^\circ$ und $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$. Benutzen Sie für die Skizze $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$.

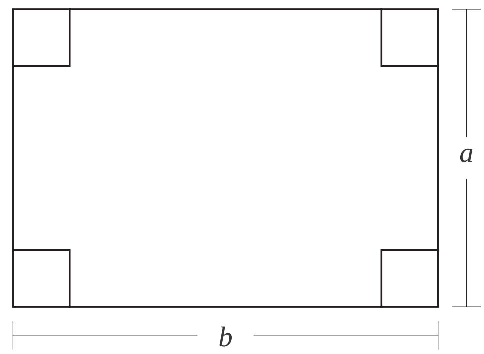
b) Berechnen Sie für beliebige v_0 und φ die Geschwindigkeit $\vec{v}\,(t)$, die Beschleunigung $\vec{a}\,(t)$ und deren Beträge.

c) Zu welcher Zeit t erreicht der Ball den höchsten Punkt der Bahn? Wie muss der Abwurfwinkel φ gewählt werden, damit die Höhe maximal wird?

d) Nach welcher Zeit t_2 trifft der Ball wieder am Erdboden auf? Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit beim Auftreffen? Wie muss der Abwurfwinkel φ gewählt werden, damit die Wurfweite maximal wird? Wie groß ist die maximale Wurfweite?

Aufgabe 13: **Extremwerte**

Auf einem rechteckigen Stück Blech mit den Seitenlängen $a = 8$ cm und $b = 5$ cm soll nach Aussägen eines Quadrates an den Ecken des Rechtecks und Hochbiegen der dadurch entstandenen Randflächen ein oben offenes Kästchen mit möglichst großem Rauminhalt hergestellt werden.
Berechnen Sie die Seitenlänge der herauszusägenden Quadrate und das Volumen des Kästchens.



Aufgabe 14: **Integralrechnung**

a) Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale $I = \int f(x)\, d(x)$

(1) $f(x) = e^x$

(2) $f(x) = x^a$ mit $a \neq -1$

(3) $f(x) = \dfrac{5x^2 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$

(4) $f(x) = x \cdot \cos x$

(5) $f(x) = x^2 e^x$

(6) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j x^j$ (Die Koeffizienten b_j seien konstant.)

(7) $f(x) = \cos^8 x \sin x$

b) Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale:

(1) $\displaystyle\int_1^4 x^3\, dx$

(2) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{-10x + 3}{(5x^2 - 3x + 1)}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\, dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Punktmenge, die von den Graphen der Funktionen

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2x$$

sowie von der x-Achse begrenzt wird.