Aufgabe 13 (mündlich): Eigenschaften der Spur (5 Punkte)
Es seien F, G, H quantenmechanische Operatoren und α, β komplexe Zahlen. Beweisen Sie folgende nützliche Eigenschaften der Spur:

a) $\mathrm{Sp}(F^\dagger) = [\mathrm{Sp}(F)]^*$,

b) $\mathrm{Sp}(\alpha F + \beta G) = \alpha \mathrm{Sp}(F) + \beta \mathrm{Sp}(G)$,

c) $\mathrm{Sp}(F^\dagger F) \geq 0$,

d) $\mathrm{Sp}(FGH) = \mathrm{Sp}(HFG) = \mathrm{Sp}(GHF)$ (zyklische Invarianz der Spur),

e) $\mathrm{Sp}(U^\dagger F U) = \mathrm{Sp}(F)$, falls U unitär ist.

Aufgabe 14 (müdlich): Thermodynamik relativistischer Teilchen (8 Punkte)
Gemäß den Gesetzen der Relativitätstheorie kann die Lichtgeschwindigkeit c für Teilchen mit endlicher Ruhemasse m_0 nie erreicht oder überschritten werden. Für diese Teilchen gilt die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \ .$$

Im Folgenden soll ein zweidimensionales Gas aus N nicht-wechselwirkenden relativistischen Teilchen betrachtet werden, die sich in einem Gebiet der Fläche A bewegen.

a) Berechnen Sie die klassische kanonische Zustandssumme $Z(T, A, N)$ und daraus die freie Energie $F(T, A, N)$ dieses Systems.
Hinweis: Substituieren Sie bei der Berechnung der Zustandssumme p durch E und verwenden Sie zur Berechnung von F die Stirling-Formel.

b) Bestimmen Sie die innere Energie U, die Entropie S und den Druck p als Funktion von T, A, N.

c) Bestimmen Sie die spezifische Wärme bei konstanter Fläche C_A in den Grenzfällen $k_\mathrm{B}T \ll m_0 c^2$ und $k_\mathrm{B}T \gg m_0 c^2$.

d) Berechnen Sie die Impulsverteilung

$$f(\vec{p}\,) = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{p} - \vec{p}_i) \right\rangle = N \left\langle \delta(\vec{p} - \vec{p}_1) \right\rangle$$

des zweidimensionalen relativistischen Gases.

Aufgabe 15 (schriftlich): Gleichverteilungssatz im mikrokanonischen Ensemble (12 Punkte)
Anhand des Beispiels eines *verallgemeinerten Gleichverteilungssatzes* soll demonstriert werden, wie einige wichtige thermodynamische Folgerungen abgeleitet werden können.

a) Berechnen Sie für ein klassisches System mit der Hamiltonfunktion $H(\vec{q},\vec{p})$ den statistischen Mittelwert in der mikrokanonischen Gesamtheit

$$\left\langle \pi_i \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right\rangle = \frac{1}{D(E)} \frac{1}{h^{3N} N!} \int \pi_i \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \delta[E - H(\vec{q},\vec{p})] \, \mathrm{d}^{3N}q \, \mathrm{d}^{3N}p$$

mit $\pi_i, \pi_j \in \{q_1, \ldots, q_{3N}, p_1, \ldots, p_{3N}\}$ und $D(E) = \frac{1}{h^{3N}N!} \int \delta[E - H(\vec{q},\vec{p})] \, \mathrm{d}^{3N}q \, \mathrm{d}^{3N}p$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left\langle \pi_i \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right\rangle = \delta_{ij} k_B T \ .$$

Hinweise: Ersetzen Sie dazu im Integranden $\frac{\partial H}{\partial \pi_j}$ *durch* $\frac{\partial}{\partial \pi_j}(H - E)$ *(da* $E = \text{const.}$*) und führen Sie eine partielle Integration durch. Verwenden Sie*

$$S(E) = k_B \ln[\varphi(E)] \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial E} S(E) \ .$$

b) Berechnen Sie nun den selben statistischen Mittelwert im kanonischen Ensemble aus N Teilchen, dessen Dynamik durch die Hamiltonfunktion H_N beschrieben wird, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho_N(q_i, p_i) = \frac{1}{Z(T,V,N)} \exp[-\beta H_N(q_i, p_i)] \ .$$

Leiten Sie auch hier den verallgemeinerten Gleichverteilungssatz her.

c) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis $\langle p_i \dot{q}_i \rangle$, $\langle q_i \dot{p}_i \rangle$, $\langle q_i \dot{q}_i \rangle$ und $\langle p_i \dot{p}_i \rangle$.

d) Berechnen Sie für ein N-Teilchen-System in kartesischen Koordinaten, d.h. $q_i = x$, $p_i = m\dot{x}_i$, $i = 1, \ldots, 3N$, in Gegenwart eines Potentials $V(x_1, \ldots, x_{3N})$ den statistischen Mittelwert des Virials der Kräfte,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{3N} x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right\rangle \ .$$

e) Bestimmen Sie für das System aus Teilaufgabe **d)** den Mittelwert der kinetischen Energie,

$$\langle T \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{3N} \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 \right\rangle \ ,$$

und vergleichen Sie diesen mit dem in **d)** erhaltenen Ergebnis.

f) Berechnen Sie die innere Energie als Funktion der Temperatur T für

(i) freie Teilchen: $V = 0$;

(ii) harmonische Oszillatoren: $V = \frac{1}{2} m\omega^2 \sum_{i=1}^{3N} x_i^2$;

(iii) Teilchen im Schwerefeld: $V = mg \sum_{i=1}^{N} z_i$,

indem Sie die statistischen Mittelwerte der potentiellen Energie $\langle V \rangle$ mit Hilfe des Virials der Kräfte auswerten.