Aufgabe 30 (schriftlich): Maxwellverteilung im mikrokanonischen Ensemble (10 Punkte)
Die Herleitung der Maxwellverteilung im kanonischen Ensemble ist trivial. Hier soll sie daher im mikrokanonischen Ensemble hergeleitet werden. Betrachten Sie dazu ein dreidimensionales Gas aus N freien nicht wechselwirkenden Teilchen im Volumen V mit der Gesamtenergie E.
Die Phasenraumdichte im mikrokanonischen Ensemble lautet

$$\rho\left(\vec{q}_i, \vec{p}_i\right) = \frac{1}{\Gamma}\delta(H - E) \ ,$$

mit dem Phasenraumvolumen

$$\Gamma = \frac{1}{h^{3N} N!} \int \mathrm{d}^{3N} q_i \, \mathrm{d}^{3N} p_i \, \delta\left(H - E\right) \ .$$

a) Berechnen Sie damit die Einteilchen-Verteilungsfunktion

$$f_1 = \frac{N}{h^{3N} N!} \int \mathrm{d}^{3N} q_i \, \mathrm{d}^{3N} p_i \, \delta\left(\vec{q}_1 - \vec{R}\right) \delta\left(\vec{p}_1 - \vec{P}\right) \rho\left(\vec{q}_i, \vec{p}_i\right)$$

als Funktion der Oberfläche einer $3N$-dimensionalen Kugel (O_{3N}) und einer $(3N-3)$-dimensionalen Kugel (O_{3N-3})
Hinweis: Viele Rechenschritte verlaufen analog zu Kap. 5.1.1.

b) Nach Kap. 5.1.1 gilt für die Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel mit Radius r

$$O_n(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \, r^{n-1} \ .$$

Berechnen Sie f_1 als Funktion der mittleren Energie pro Teilchen $\varepsilon = E/N$.

c) Zeigen Sie, dass sich mit $\varepsilon = \frac{3}{2} k_\mathrm{B} T$ und für $N \gg 1$ die Maxwellverteilung aus Kap. 8.3 ergibt.
Hinweis: Für die Gamma-Funktion gilt:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \ .$$

Nutzen Sie folgende Stirling-Näherung für große x:

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x - \frac{1}{2}\right)} \approx \sqrt{x}$$

und die Darstellung der Exponentialfunktion:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ .$$

Aufgabe 31 (mündlich): H-Theorem für Quantengase (10 Punkte)

In der Vorlesung (Kap. 8.4.4) wurde das H-Theorem für klassische Teilchen hergeleitet. Analog dazu lässt sich das H-Theorem auch quantenstatistisch zeigen. In der Quantenstatistik ist es sinnvoll, die Verteilungsfunktion $f_1(\vec{P}, \vec{R}, t)$ so zu definieren, dass sie dimensionslos ist. Sie erfüllt dann die Normierung

$$\frac{1}{h^3} \int \mathrm{d}^3 P \, \mathrm{d}^3 R \; f_1\left(\vec{P}, \vec{R}, t\right) = N \; .$$

Wegen der Symmetrie bzw. Anitsymmetrie der Wellenfunktion müssen bei quantenmechanischen Teilchen die Besetzungen der Endzustände in einem Streuprozess berücksichtigt werden. Dies führt zu folgender Stoßrate

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} f_1\left(\vec{P}, \vec{R}, t\right)\right)_{\text{Stoß}} = & - \int \mathrm{d}^3 P' \; f_1\left(\vec{P}, \vec{R}, t\right) \left[1 \pm f_1\left(\vec{P}', \vec{R}, t\right)\right] W\left(\vec{P} \to \vec{P}'\right) \\ & + \int \mathrm{d}^3 P' \; f_1\left(\vec{P}', \vec{R}, t\right) \left[1 \pm f_1\left(\vec{P}, \vec{R}, t\right)\right] W\left(\vec{P}' \to \vec{P}\right)\end{aligned}$$

mit der Stoßwahrscheinlichkeit

$$W\left(\vec{P} \to \vec{P}'\right) = \int \mathrm{d}^3 P_1 \mathrm{d}^3 P_1' \; f_1\left(\vec{P}_1, \vec{R}, t\right) \left[1 \pm f_1\left(\vec{P}_1', \vec{R}, t\right)\right] w\left(\vec{P}, \vec{P}_1 \to \vec{P}', \vec{P}_1'\right) \; .$$

Das obere Vorzeichen gilt dabei für Bosonen, das untere für Fermionen.

Der Driftterm in der Blotzmann-Gleichung bleibt (näherungsweise) unverändert.

In der Vorlesung wird gezeigt, dass die Größe $\eta(\vec{R}, t)$ als (negative) Entropiedichte des idealen Gases identifiziert werden kann. Daher wählen wir in dieser quantenmechanischen Rechnung

$$\eta(\vec{R}, t) = \frac{1}{h^3} \int \mathrm{d}^3 P \; \left\{ f_1\left(\vec{P}, \vec{R}, t\right) \ln\left[f_1\left(\vec{P}, \vec{R}, t\right)\right] \mp \left[1 \pm f_1\left(\vec{P}, \vec{R}, t\right)\right] \ln\left[1 \pm f_1\left(\vec{P}, \vec{R}, t\right)\right] \right\}$$

analog zur Entropie eines idealen Quantengases aus Kap. 5.2.3.

a) Leiten Sie analog zum Vorgehen im Skript eine Kontinuitätsgleichung für $\eta(\vec{R}, t)$ her. Wie lautet dann die Größe $\sigma_\eta(\vec{R}, t)$.

b) Zeigen Sie, dass auch hier $\sigma_\eta \leq 0$ gilt und dass damit auch hier das Boltzmannsche H-Theorem erfüllt ist.

c) Zeigen sie, dass σ_η verschwindet, wenn für die Verteilungsfunktion eine Bose-Einstein- bzw. Fermi-Dirac-Verteilung eingesetzt wird.