Aufgabe 5 (mündlich): Verdampfendes Metall (4 Punkte)
Ein Metall verdampft im Vakuum von einem heißen Glühfaden aus. Die Metallatome fallen auf eine Quarzplatte, die sich in einiger Entfernung davon befindet, und bilden dort eine dünne metallische Schicht. Diese Quarzplatte wird auf einer niedrigen Temperatur gehalten, so dass jedes auffallende Metallatom an der Stelle seines Auftreffens verbleibt, ohne sich weiter fortzubewegen. Von den Metallatomen kann angenommen werden, dass sie auf jedes Flächenelement der Platte mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreffen.

a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Metallatome, die sich auf einem Flächenelement der Größe b^2 anhäufen (wo b der Durchmesser der Metallatome ist), näherungsweise nach einer Poisson-Verteilung verteilt ist.

b) Angenommen, man verdampft genügend Metall, damit sich ein Film mit einer mittleren Dicke von 6 Atomschichten bilden kann. Welcher Bruchteil der Untergrundfläche ist dann überhaupt nicht mit Metall bedeckt? Welcher Bruchteil ist mit Metall einer Dicke von 3 Atomschichten und welcher Bruchteil mit Metall einer Dicke von 6 Atomschichten bedeckt?

Aufgabe 6 (mündlich): Behälter mit nicht-wechselwirkenden Gasmolekülen (5 Punkte)
In einem Behälter mit dem Volumen V_0 befindet sich ein Gas von N_0 nicht wechselwirkenden Molekülen. Man betrachte in diesem Behälter irgendein Teilvolumen V und bezeichne mit N die Anzahl der darin befindlichen Moleküle. Jedes Molekül befindet sich an jeder Stelle des Behälters mit gleicher Wahrscheinlichkeit; somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein gegebenes Molekül innerhalb des Teilvolumens V befindet, einfach gegeben durch V/V_0.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, N Moleküle im Volumen V_0 anzutreffen? Wie groß ist die mittlere Anzahl $\langle N\rangle$ von Molekülen in V? Drücken Sie das Ergebnis durch N_0, V_0 und V aus.

b) Bestimmen Sie das relative Schwankungsquadrat $\left\langle (N-\langle N\rangle)^2\right\rangle / \langle N\rangle^2$ der in V befindlichen Anzahl von Molekülen. Drücken Sie das Ergebnis durch $\langle N\rangle$, V und V_0 aus.

c) Was wird aus dem Ergebnis von **b)**, wenn $V \ll V_0$ gilt?

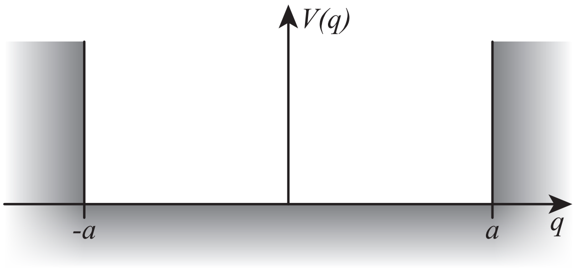
d) Welchen Wert sollte das Schwankungsquadrat $\left\langle (N-\langle N\rangle)^2\right\rangle$ für $V \to V_0$ annehmen? Stimmt das Ergebnis von **b)** mit dieser Erwartung überein?

Aufgabe 7 (mündlich): Trajektorien im Phasenraum (3 Punkte)

Zeichnen Sie die Bahnkurve im Phasenraum für ein Teilchen,

a) das sich mit der Energie E in einem eindimensionalen harmonischen Oszillator Potential $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ bewegt.

b) das sich mit der Energie E in einem eindimensionalen, unendlich hohen Kastenpotential bewegt.



c) das unter der Schwerkraft aus der Höhe h herabfällt, am Boden inelastisch reflektiert wird und wieder bis zur Höhe $9h/10$ aufsteigt, usw.

Aufgabe 8 (schriftlich): Charakteristische Funktion (11 Punkte)

Berechnen Sie die charakteristische Funktion der unten angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Für eine kontinuierliche Verteilung bzw. für eine diskrete Verteilung gilt:

$$C(k) = \left\langle e^{ikx} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} W(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad C(k) = \left\langle e^{ikm} \right\rangle = \sum_m e^{ikm} W(m)$$

Berechnen Sie außerdem die Momente $\langle x^n \rangle$ und die Kumulaten κ_n für $n = 1, 2$ mittels der charakteristischen Funktion.

a) Gauß-Verteilung

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

Berechnen Sie hier zusätzlich die Momente für $n = 3, 4$ und die Kumulanten für $n \geq 3$.

b) Binomial-Verteilung

$$W(m) = \binom{N}{m} p^m q^{N-m}$$

mit $p + q = 1$.

c) Poisson-Verteilung

$$W(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

mit $\lambda > 0$. Berechnen Sie hier zusätzlich die Kumulanten für $n \geq 3$.

Hinweis: Nur Lösungen mit nachvollziehbarem Lösungsweg geben die volle Punktzahl.