Aufgabe 11 (mündlich): Mikrokanonisches Ensemble aus zweidim. Oszillatoren (12 Punkte)
Ein Fadenpendel, das in zwei Richtungen schwingt, kann für kleine Auslenkungen als klassischer zweidimensionaler harmonischer Oszillator aufgefasst werden. Die zugehörige Hamiltonfunktion lautet:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(q_1^2 + q_2^2\right) .$$

a) Stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf und geben Sie die Lösungen für folgende Anfangsbedingungen an:

(i) $q_1(0) = q_0, \quad p_1(0) = p_0, \quad q_2(0) = 0, \quad p_2(0) = 0$

(ii) $q_1(0) = q_0, \quad p_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \quad p_2(0) = p_0$

Wie groß ist die Gesamtenergie in den beiden Fällen? Berechnen Sie für beide Fälle die zeitlichen Mittelwerte $\overline{q_2}$ und $\overline{q_2^2}$.

b) Betrachten Sie nun ein mikrokanonisches Ensemble von 2-dimensionalen harmonischen Oszillatoren mit fester Energie E. Berechnen Sie das integrale Phasenraumvolumen $\varphi(E)$ und daraus die Zustandsdichte im Phasenraum $D(E)$. Benutzen Sie dazu die Formel für das Volumen einer n-dimensionalen Kugel mit Radius R:

$$V_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} R^n .$$

$\Gamma(x)$ sei hier die Γ-Funktion.

c) Die Wahrscheinlichkeitsdichte für ein klassisches mikrokanonisches Ensemble aus 2-dimensionalen Oszillatoren mit Energie E und verschwindender Energieunschärfe lautet:

$$\rho(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{D(E)}\delta\left[E - H(q_1, q_2, p_1, p_2)\right] .$$

Berechnen Sie damit die Scharmittelwerte $\langle q_2 \rangle$ und $\langle q_2^2 \rangle$.
Hinweis: Ein nützliches Integral:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16} .$$

d) Das Ergebnis für $\langle q_2^2 \rangle$ hängt von der Energie E ab. Drücken Sie für den allgemeinen Fall

$$q_1(t) = \hat{q}_1 \cos(\omega t - \phi_1)$$
$$q_2(t) = \hat{q}_2 \cos(\omega t - \phi_2)$$

den Scharmittelwert $\langle q_2^2 \rangle$ durch die Amplituden $\hat{q}_1$ und $\hat{q}_2$ aus. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Aufgabenteil **a)**. Was können Sie über die Ergodizität des Systems sagen?

e) Berechnen Sie für die allgemeine Lösung aus Aufgabenteil **d)** die Abhängigkeit der Größe $L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch und stellen Sie wieder einen Zusammenhang zur Ergodizität des Systems her.

Aufgabe 12 (schriftlich): Zusammengesetztes System aus klassischen HOs (12 Punkte)

a) Gegeben sei ein System aus N dreidimensionalen harmonischen Oszillatoren mit der Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2 \right) \ .$$

Berechnen Sie das totale Phasenraumvolumen $\varphi(E, N)$ und daraus die Zustandsdichte $D(E, N)$. Verwenden Sie dazu die in Aufgabe 11 b) angegebene Formel für das Volumen einer n-dimensionalen Kugel.

b) Im Folgenden betrachten wir ein zusammengesetztes System aus zwei Teilsystemen mit N_1 bzw. N_2 harmonischen Oszillatoren, die sich im thermischen Kontakt befinden. Bestimmen Sie die Zustandsdichte $D(E, N)$ des Gesamtsystems aus der Beziehung

$$D(E, N) = \int_0^E D_1(E', N_1) D_2(E - E', N_2) \, \mathrm{d}E' \, . \tag{1}$$

Wie lautet $\ln[D(E, N)]$ im Grenzfall $N_1, N_2 \gg 1$?
Hinweis: Es gilt

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, \mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \ .$$

Zeigen Sie dies durch partielle Integration.

c) Berechnen Sie nun $D(E, N)$ gemäß Gl. (1) näherungsweise, indem Sie

$$\ln \left[D_1(E', N_1) \, D_2(E - E', N_2) \right]$$

bis zur zweiten Ordnung um das Maximum bei $E' = \hat{E}_1$ entwickeln. Dabei sei wieder $N_1, N_2 \gg 1$. Vergleichen Sie das so erhaltene Ergebnis für $\ln[D(E, N)]$ mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe **b)**.

d) Ersetzen Sie nun in Gl. (1) das Integral durch den Integranden am Maximum $E' = \hat{E}_1$ und berechnen Sie damit $\ln[D(E, N)]$. Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes ($N \to \infty$) alle drei Rechnungen auf dasselbe Ergebnis führen.

e) Identifizieren Sie $k_\mathrm{B} \ln[D(E, N)]$ mit der Entropie $S(E, N)$ und bestimmen Sie daraus die Temperatur $T(E, N)$. Wie lautet damit die kalorische Zustandsgleichung $E(T, N)$ und die spezifische Wärme $C = \frac{\partial E}{\partial T}$.