Aufgabe 16 (mündlich): Klassisches ideales Gas aus zweiatomigen Molekülen (5 Punkte)
Ein System aus N nicht-wechselwirkenden zweiatomigen Molekülen sei bei der Temperatur T im Volumen V eingeschlossen. Die Hamiltonfunktion eines einzelnen Moleküls bestehend aus Atomen der Massen m_1 und m_2 lautet

$$H(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}\alpha \left|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\right|^2$$

a) Berechnen Sie zunächst die klassische kanonische Zustandssumme $Z(T, V, 1)$ für ein Molekül. *Hinweis: Zur Berechnung der Ortsintegrale transformieren Sie zweckmäßigerweise auf Relativ- und Schwerpunktkoordinaten.*

b) Die Zustandssumme für N ununterscheidbare Teilchen ergibt sich daraus gemäß

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!}\left[Z(T, V, 1)\right]^N \ .$$

Berechnen Sie $Z(T, V, N)$ und daraus die freie Energie $F(T, V, N)$. Verwenden Sie dazu die Stirlingformel. Zeigen Sie, dass F eine extensive Größe ist, d.h., dass bei Vergrößerung von V und N um einen Faktor γ sich auch F um denselben Faktor γ vergrößert.

c) Berechnen Sie den Druck $p(T, V, N)$ dieses Gases.

d) Berechnen Sie die innere Energie $U(T, V, N)$ und daraus die Wärmekapazität C_V.

Aufgabe 17 (mündlich): Vergleich von klassischer und Quanten-Statistik des HO (7 Punkte)
Ein einzelner eindimensionaler harmonischer Oszillator befinde sich im thermischen Kontakt mit einem Wärmebad. Dieses System kann sowohl im Rahmen der klassischen statistischen Physik (Hamiltonfunktion $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$) als auch nach den Methoden der Quantenstatistik behandelt werden, wobei die möglichen Energieeigenwerte des Quantensystems bekanntlich durch $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ gegeben sind.

a) Berechnen Sie für beide Fälle (klassische Statistik bzw. Quantenstatistik) jeweils die kanonische Zustandssumme $Z(T)$.

b) Bestimmen Sie daraus in beiden Fällen die freie Energie $F(T)$, die innere Energie $U(T)$ und die Entropie $S(T)$.

c) Berechnen Sie in beiden Fällen die Wärmekapazität C_V. Zeigen Sie, dass die beiden Ausdrücke im Grenzfall $T \to \infty$ übereinstimmen. Wie verhalten sich die Wärmekapazität im Grenzfall $T \to 0$?

d) Was ergibt sich für die Entropie im Grenzfall $T \to 0$? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik.

Aufgabe 18 (schriftlich): Schwankungen bei idealen Quantengasen (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das mittlere Schwankungsquadrat $\left\langle (\Delta n_i)^2 \right\rangle$ der Besetzung eines Zustands i eines idealen Quantengases im großkanonischen Ensemble. Drücken Sie das Ergebnis durch die mittlere Besetzungszahl $\langle n_i \rangle$ aus. Vergleichen Sie die Fälle der Bose-Einstein- und der Fermi-Dirac-Statistik mit dem Grenzfall der klassischen Statistik.

b) Zeigen Sie, dass sich das mittlere Schwankungsquadrat der Teilchenzahl $\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle$ additiv aus den Schwankungsquadraten der Besetzungszahlen zusammensetzt.

c) Kanonisches und großkanonisches Ensemble sind äquivalent, falls die relativen Schwankungen der Teilchenzahl $\sqrt{\langle (\Delta N)^2 \rangle} / \langle N \rangle$ für große mittlere Teilchenzahlen gegen null gehen. Zeigen Sie, dass dies für Fermisysteme und im klassischen Grenzfall stets zutrifft, dass es aber bei Bosonen zumindest dann nicht mehr gilt, wenn sich nahezu alle Teilchen im tiefsten Einteilchenzustand befinden (Bose-Einstein-Kondensation).