**Aufgabe 25 (mündlich):** Bohr van Leeuwen Theorem (4 Punkte)
Für $N$ Elektronen an den Orten $\vec{r}_i$ und mit den Impulsen $\vec{p}_i$, die sich im elektromagnetischen Feld mit den Potentialen $\vec{A}$ und $\phi$ befinden, lautet der Hamilton-Operator:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[ \frac{1}{2m} \left( \vec{p}_i + e\vec{A} \right)^2 + e\phi \right] + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \ ,$$

wobei der hintere Term die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Teilchen beschreibt. Zeigen Sie, dass es für dieses System keinen Magnetismus gibt und damit die Aussage des Bohr von Leeuwen Theorem gilt, nämlich, dass es in der klassischen Physik im thermischen Gleichgewicht keine Magnetisierung gibt.
*Hinweis: Betrachten Sie die freie Energie.*

**Aufgabe 26 (mündlich):** Magnetismus der Bahnbewegung von Elektronen (10 Punkte)
Wir betrachten ein System aus $N$ nicht-wechselwirkenden Elektronen der Ladung $-e$ und der Masse $m$ im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. Wie in der Quantenmechanik gezeigt wird, lauten die Energieeigenwerte in diesem Fall

$$E(n, k_z) = 2\mu_B B_0 \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \ .$$

Dabei ist $\mu_B$ das Bohrsche Magneton, $n$ ist eine diskrete Quantenzahl mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $k_z$ ein kontinuierlicher Wellenvektor. Der Entartungsgrad eines Zustands ist gegeben durch

$$g(B_0) = \frac{eL_xL_y}{2\pi\hbar} B_0 \ ,$$

mit den Normierungslängen $L_x$, $L_y$, $L_z$ und dem Volumen $V = L_xL_yL_z$.

**a)** Die Zustandssumme für ein einzelnes Teilchen ist dann gegeben durch

$$Z(T, V, B_0, 1) = \frac{L_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g(B_0) e^{-\beta E(n,k_z)} \, \mathrm{d}k_z \ .$$

Berechnen Sie $Z(T, V, B_0, 1)$.

**b)** Die Temperatur sei so hoch, dass das $N$-Elektronensystem näherungsweise der klassischen Statistik genügt. In diesem Fall gilt

$$Z(T, V, B_0, N) = \frac{[Z(T, V, B_0, 1)]^N}{N!} \ .$$

Berechnen Sie $Z(T, V, B_0, N)$ und daraus unter Verwendung der Stirling-Formel die freie Energie $F(T, V, B_0, N)$.

**c)** Bestimmen sie die Entropie $S(T, V, B_0, N)$, die innere Energie $U(T, V, B_0, N)$ und den Druck $p(T, V, B_0, N)$.

**d)** Berechnen Sie die Magnetisierung $M = -\frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial B_0}$. Was ergibt sich für $M$ im Grenzfall $B_0 \to \infty$? Für genügend kleine Magnetfelder können sie $M$ entwickeln. Wie lautet $M$ bis zur ersten Ordnung in $B_0$? Bestimmen Sie daraus die Suszeptibilität $\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B_0}$. Um welchen Typ von Magnetismus (Dia-, Para- oder Ferromagnetismus) handelt es sich?

**Aufgabe 27 (schriftlich):** Klassische Theorie des Para- und Ferromagnetismus (12 Punkte)

Nach der klassischen Vorstellung besteht ein paramagnetisches Material aus $N$ magnetischen Momenten $\vec{\mu}_i$ im Volumen $V$, deren Orientierung im Raum durch die beiden Winkel $\vartheta_i$ und $\varphi_i$ beschrieben wird. Dabei sind alle Einstellungen mit $0 \leq \vartheta_i < \pi$, $0 \leq \varphi_i < 2\pi$ möglich und es gilt $|\vec{\mu}_i| = \mu$. Die Hamiltonfunktion für dieses System im homogenen Magnetfeld $\vec{B}_0$ lautet

$$H = -\sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{B}_0 = -\sum_i \mu B_0 \cos(\vartheta_i) \ ,$$

wobei die $z$-Achse in die Richtung des Magnetfeldes gelegt werde. Die kanonische Verteilung lautet dann

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \qquad \text{mit} \qquad Z = \int \prod_{i=1}^{N} \sin(\vartheta_i)\, \mathrm{d}\vartheta_i\, \mathrm{d}\varphi_i\ e^{-\beta H} \ .$$

**a)** Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(T, B_0, N)$ und daraus die freie Energie $F(T, B_0, N)$ des Systems.

**b)** Zeigen Sie, dass für die Magnetisierung $M = \frac{1}{V} \sum_i \langle \mu_{i,z} \rangle$ gilt:

$$M = -\frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial B_0} \ .$$

Dabei ist $\mu_{i,z}$ die $Z$-Komponente des magnetischen Moments.

**c)** Berechnen Sie damit die Magnetisierung und zeigen Sie, dass diese geschrieben werden kann als

$$M = \frac{N\mu}{V}\, L\left( \frac{\mu B_0}{k_B T} \right) \ . \tag{1}$$

Die Funktion $L(x)$ heißt Langevin-Funktion. Skizzieren Sie $L(x)$.

**d)** Berechnen Sie im Grenzfall $B_0 \to 0$ die Suszeptibilität $\chi = \mu_0 \frac{\partial M}{\partial B_0}$ und zeigen Sie, dass diese das Curiesche Gesetz $\chi = C/T$ erfüllt. Wie lautet die Konstante $C$?

**e)** In der Weißschen Theorie des Ferromagnetismus geht man davon aus, dass sich das effektive Magnetfeld $\vec{B}_{\text{eff}}$ am Ort eines magnetischen Moments zusammensetzt aus dem externen Feld $\vec{B}_0$ und einem internen Feld $\vec{B}_1$, das durch die anderen Momente erzeugt wird. Es sei $\vec{B}_1 = \lambda \vec{M}$. Ersetzen Sie in Gleichung (1) $B_0$ durch $B_{\text{eff}}$ und zeigen Sie anhand einer grafischen Lösung dieser Gleichung, dass unter geeigneten Bedingungen auch für $B_0 = 0$ eine nicht-verschwindende Magnetisierung $M = M_{\text{s}} \neq 0$ auftreten kann. In welchem Temperaturbereich existiert solch eine Lösung?