Aufgabe 4: Dirac'sche δ-Funktion (δ-Distribution) (schriftlich, 5 Punkte)

Es gibt „verallgemeinerte" Funktionen (Distributionen) $f(x)$, die wie folgt definiert sind:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, F(x)\, d\,x \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, F(x)\, d\,x \;.$$

$F(x)$ ist eine beliebig oft differenzierbare sogenannte „Grundfunktion" und soll ein „geeignetes" asymptotisches Verhalten haben, so dass alle Integrale existieren. Die δ-Funktion ist ein Spezialfall einer verallgemeinerten Funktion, für die gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, F(x)\, d\,x \;=\; F(0) \;. \tag{4.1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge $f_k(x) = \frac{\sin(k\,x)}{\pi\,x}$ eine verallgemeinerte Funktion mit den Eigenschaften der δ-Funktion Gl. (4.1) definiert.
Hinweis: Variablensubstitution.

b) Zeigen Sie, dass auch die Folgen

$$\text{i)}\quad f_k(x) \;=\; \frac{\sin^2(k\,x)}{\pi\,k\,x^2} \qquad\qquad \text{ii)}\quad f_k(x) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_{-k}^{k} e^{i\,t\,x}\, d\,t$$

$$\text{iii)}\quad f_k(x) \;=\; \frac{1}{\pi\,k\,(x^2 \,+\, 1/k^2)} \qquad\qquad \text{iv)}\quad f_k(x) \;=\; \sqrt{\frac{k}{\pi}}\, e^{-k\,x^2}$$

die gleiche Eigenschaft wie die Folge in Aufgabenteil a) besitzen. Daraus ergeben sich die folgenden Darstellungen der δ-Funktion:

$$\text{i)}\quad \delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\lim_{k\to\infty}\frac{\sin^2(k\,x)}{k\,x^2} \qquad\qquad \text{ii)}\quad \delta(x) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,t\,x}\, d\,t$$

$$\text{iii)}\quad \delta(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{x^2 \,+\, \varepsilon^2}\;(\varepsilon \,>\, 0) \qquad\qquad \text{iv)}\quad \delta(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{k\to\infty}\sqrt{k}\, e^{-k\,x^2} \;.$$

c) Zeigen Sie, dass für die verallgemeinerte Funktion $\delta(g(x))$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(g(x))\, d\,x \;=\; \sum_j \frac{f(x_j)}{\left|\frac{d\,g}{d\,x}(x_j)\right|} \;,$$

wobei die x_j die einfachen Nullstellen der Funktion $g(x)$ sind.

Aufgabe 5: Fourier-Transformation **(mündlich, 8 Punkte)**

Die Fourier-Transformierte $f(k)$ einer Funktion $g(x)$ ist gegeben durch

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-ikx}\, dx \ .$$

Dafür müssen $g(x)$ und alle Ableitungen für $|x| \to \infty$ gegen Null gehen.

a) Wie lautet die zugehörige Umkehrtransformation?

b) Gegeben seien die folgenden Funktionen $G(x)$:

$$x^n\, g(x) \ , \qquad g(x + x_0) \ , \qquad \frac{d^n}{dx^n}\, g(x) \ ,$$
$$g_1(x)\, g_2(x) \ , \qquad e^{-ik_0 x}\, g(x) \ , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y)\, g_2(x - y)\, dy \ .$$

Drücken Sie die zugehörigen Fouriertransformierten $F(k)$ durch die Fouriertransformierten $f(k)$ bzw. $f_i(k)$ der Funktionen $g(x)$ bzw. $g_i(x)$ aus.

c) Zeigen Sie das Parseval'sche Theorem

$$\int g_1^*(x)\, g_2(x)\, dx = \int f_1^*(k)\, f_2(k)\, dk \ .$$

Was folgt daraus speziell für $g_1 = g_2 = g$?

d) Gegeben sei eine normierte Funktion $g(x)$, d. h. eine Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\, dx = 1 \ ,$$

ihre Fouriertransformierte sei $f(x)$. Die Momente $\langle x^n \rangle$ bzw. $\langle k^n \rangle$ sind definiert durch

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\, |g(x)|^2\, dx \ , \qquad \langle k^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k^n\, |f(k)|^2\, dk \ .$$

Wir nehmen zunächst an, dass die Mittelwerte verschwinden, d. h. $\langle x \rangle = \langle k \rangle = 0$. Zeigen Sie, dass die mittleren quadratischen Abweichungen

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \ , \qquad (\Delta k)^2 = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle$$

die folgende Ungleichung (Unschärferelation) erfüllen:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie hierzu das Integral

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| k\, f(k) + \lambda \frac{df}{dk} \right|^2 dk \ , \qquad \lambda \ \text{reell} \ .$$

e) Begründen Sie, dass die Ungleichung in Teil d) auch im Fall nicht-verschwindender Mittelwerte gilt.

Aufgabe 6: **Wellenpaket** **(schriftlich, 7 Punkte)**

Ein Wellenpaket für ein freies Teilchen im eindimensionalen Fall sei durch folgendes Fourierintegral (Entwicklung nach ebenen Wellen) gegeben:

$$\psi\,(x,\,t) \;=\; (2\,\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\,(k)\, e^{i\,[k\,x\,-\,\omega\,(k)\,t]}\, d\,k\ . \tag{6.1}$$

$\varphi\,(k)$ ist die Fouriertransformierte von $\psi\,(x,\,0)$ und erfüllt die Beziehung

$$\varphi\,(k) \;=\; (2\,\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi\,(x,\,0)\, e^{-i\,k\,x}\, d\,x\ ,$$

$\omega\,(k)$ ist gegeben durch $\omega\,(k) \;=\; \frac{\hbar\,k^2}{2\,m}$.

a) $\varphi\,(k)$ habe die Gestalt

$$\varphi\,(k) \;=\; A\,\exp\,(-a|k\,-\,k_0|) \qquad (k_0,\,A,\,a\,\text{reell};\,A\,>\,0\ \ \text{und}\ \ a\,>\,0)\ .$$

Welchen Wert hat die Konstante A, damit $\psi\,(x,\,t)$ auf 1 normiert ist?

b) Wegen der „guten“Lokalisierung von $\varphi\,(k)$ im k-Raum (a sei genügend groß), kann man in erster Näherung den Exponenten des Integranden in Gl. (6.1) linearisieren (Entwicklung von $\omega\,(k)$ um k_0, Abbruch nach dem linearen Glied). Das so entstandene Integral kann man elementar auswerten. Führen Sie diese Integration durch.

c) Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi\,(x,\,t)|^2$ für verschiedene Zeiten. Was ist bei der genähert berechneten Ortsform $\psi\,(x,\,t)$ des Pakets qualitativ falsch? (Denken Sie an die de Broglie'schen Beziehungen und was daraus folgt.)

d) Berechnen Sie für die gefunde Näherungslösung die Erwartungswerte $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$ sowie das Unschärfeprodukt:

$$\left\langle (x\,-\,\langle x\rangle)^2 \right\rangle \left\langle (p\,-\,\langle p\rangle)^2 \right\rangle\ .$$

Vergleichen Sie das Unschärfeprodukt mit demjenigen eines Gauß'schen Wellenpakets.